Funzioni convesse e funzioni concave

Definizione 1. *Sia (a,b) un intervallo aperto di $\mathbb{R}$.*

- *Diciamo che la funzione $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è convessa, se*

$$f(tx+(1-t)y)\le tf(x)+(1-t)f(y)\quad\text{per ogni}\quad x,y\in(a,b),\ t\in[0,1].$$

- *Diciamo che la funzione $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è concava, se*

$$f(tx+(1-t)y)\ge tf(x)+(1-t)f(y)\quad\text{per ogni}\quad x,y\in(a,b),\ t\in[0,1].$$

Teorema 2. *Sia (a,b) un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile su (a,b). Allora, f è convessa (concava), se e solo se, la derivata $f':(a,b)\to\mathbb{R}$ è crescente (decrescente).*

Dimostrazione: Dimostriamo prima che se f è convessa, allora la derivata f' è crescente. Siano $x,y\in(a,b)$ due punti tali che $x<y$. Dimostreremo che $f'(x)<f'(y)$. Sia $h>0$. Allora abbiamo che

$$x+h=(1-t)x+ty,\qquad\text{dove}\qquad t=\frac{h}{y-x}\quad\text{e}\quad 1-t=\frac{y-x-h}{y-x}.$$

Per la convessità di f, abbiamo che

$$f(x+h)\le\frac{y-x-h}{y-x}f(x)+\frac{h}{y-x}f(y)$$

Analogamente,

$$y-h=sx+(1-s)y,\qquad\text{dove}\qquad s=\frac{h}{y-x}\quad\text{e}\quad 1-s=\frac{y-x-h}{y-x},$$

e usando di nuovo la convessità di f abbiamo

$$f(y-h)\le\frac{h}{y-x}f(x)+\frac{y-x-h}{y-x}f(y).$$

Si ha quindi

$$f(x+h)+f(y-h)\le\left(\frac{y-x-h}{y-x}f(x)+\frac{h}{y-x}f(y)\right)+\left(\frac{h}{y-x}f(x)+\frac{y-x-h}{y-x}f(y)\right)=f(x)+f(y).$$

Ora, usando la definizione di derivata, abbiamo

$$\begin{aligned}f'(x)-f'(y)&=\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(y-h)-f(y)}{-h}\right)\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)+f(y-h)-f(y)}{h}\le0,\end{aligned}$$

il che conclude la prima parte della dimostrazione.

Supponiamo ora che f' sia una funzione crescente. Siano $x,y\in(a,b)$ due punti tali che $x<y$. Sia $t\in(0,1)$. Per il teorema di Lagrange, esistono due punti, z,w tali che $x<z<tx+(1-t)y<w<y$ e

$$f'(z)=\frac{f\big(tx+(1-t)y\big)-f(x)}{(tx+(1-t)y)-x}\qquad\text{e}\qquad f'(w)=\frac{f(y)-f\big(tx+(1-t)y\big)}{y-(tx+(1-t)y)}.$$

Siccome f' è crescente e $z < w$, abbiamo

$$\begin{aligned}
0 \geq f'(z) - f'(w) &= \frac{f\big(tx+(1-t)y\big) - f(x)}{(tx+(1-t)y) - x} - \frac{f(y) - f\big(tx+(1-t)y\big)}{y - (tx+(1-t)y)} \\
&= \frac{f\big(tx+(1-t)y\big) - f(x)}{(1-t)(y-x)} - \frac{f(y) - f\big(tx+(1-t)y\big)}{t(y-x)} \\
&= \frac{t\Big(f\big(tx+(1-t)y\big) - f(x)\Big) - (1-t)\Big(f(y) - f\big(tx+(1-t)y\big)\Big)}{t(1-t)(y-x)} \\
&= \frac{f\big(tx+(1-t)y\big) - tf(x) - (1-t)f(y)}{t(1-t)(y-x)}.
\end{aligned}$$

In conclusione,

$$0 \geq f\big(tx+(1-t)y\big) - tf(x) - (1-t)f(y).$$

il che vuol dire che f è convessa.

Corollario 3. *Sia (a,b) un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte su (a,b). Allora, f è convessa (concava), se e solo se, la $f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$) su (a,b).*

Dimostrazione: Basta osservare che

$$f' \quad \text{è crescente} \quad \Leftrightarrow \quad f'' \geq 0 \quad \text{su} \quad (a,b).$$

Esempio 4. *Le funzioni x^2 e e^x sono convesse su $\mathbb{R}$. Le funzioni $\sqrt{x}$ e $\ln x$ sono concave su $(0,+\infty)$.*