1 Principio di induzione

Esercizio 1. *Dimostrare che*

$$2^n \geq n \quad \textit{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 2. *Sia* $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. *Dimostrare che*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \textit{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 3. *Sia* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. *Dimostrare che*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

Esercizio 4. *Sia* $n \in \mathbb{N}$. *Dimostrare che*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Esercizio 5. *Sia* $n \in \mathbb{N}$. *Dimostrare che*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esercizio 6. *Dimostrare che ogni insieme finito ammette un massimo ed un minimo. Usando questo risultato, dimostrare che ogni insieme di numeri naturali ammette un minimo.*

Esercizio 7. *Siano* $x, y \in \mathbb{R}$ *ed* $n \in \mathbb{N}$. *Dimostrare che*

$$x^n y^n = (xy)^n.$$

Esercizio 8. *Siano* $x, y \in \mathbb{R}$ *ed* $n \in \mathbb{N}$. *Dimostrare che*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$ *ed ogni numero intero* k *tale che* $0 \leq k \leq n$, *difiniamo*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

dove, per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$k! = \prod_{j=1}^{k} = 1.2.3\ldots(k-1)k,$$

e dove, per definizione, $0! = 1$.