Successioni e limiti di successioni

Esercizio 1. *Dimostrare, usando soltanto la definizione di limite, che:*

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)^2} = 0$;

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)^{1/3}} = 0$;

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{1+n^2} = 0$;

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2^n} = 0$.

Esercizi sulla definizione di limite

Esercizio 2. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri reali. Dimostrare che se*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^2 = 0,$$

allora anche

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Esercizio 3. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri reali. Dimostrare che se*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n^2 - 4a_n) = -4,$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

Esercizio 4. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri reali con la proprietà seguente. Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $N \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$|a_j + a_k| \le \varepsilon \quad \textit{per ogni} \quad j, k \ge N.$$

Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Esercizio 5. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri reali con la proprietà seguente. Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $N \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$|a_j + 2a_k + 3a_n| \le \varepsilon \quad \textit{per ogni} \quad j, k, n \ge N.$$

Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Potenza e radice di una successione convergente

Esercizio 6. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri reali. Dimostrare che se*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^2 = A,$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \sqrt{A}.$$

Trovare una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tale che esiste il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^2,$$

ma non esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Esercizio 7. *Dimostrare, usando soltanto la definizione di limite, che se la successione di numeri reali* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ad* a*, allora*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^2 = a^2.$$

Esercizio 8. *Sia* $k \in \mathbb{N}$ *un numero naturale dato. Sia* $(a_n)_{n\geq1}$ *una successione convergente e sia*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Dimostrare, che la successione $(a_n^k)_{n\geq1}$ *converge e*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^k = a^k.$$

Esercizio 9. *Sia* $k \in \mathbb{N}$ *un numero naturale dato. Sia* $(a_n)_{n\geq1}$ *una successione convergente di numeri reali positivi e sia*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Dimostrare, che la successione $(a_n^{1/k})_{n\geq1}$ *converge e*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{1/k} = a^{1/k}.$$

Per gli ultimi due esercizi usare la formula

$$x^k - y^k = (x-y)\Big(\sum_{j=0}^{k-1} x^j y^{k-j}\Big) \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.$$

Due esercizi su successioni prodotto

Esercizio 10. *Siano* $(a_n)_{n\geq1}$ *e* $(b_n))_{n\geq1}$ *due successioni di numeri reali. Supponiamo che:*

- $(a_n)_{n\geq1}$ *sia una successione convergente e* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *;*
- $(b_n)_{n\geq1}$ *sia una successione limitata.*

Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0.$$

Esercizio 11. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri reali per cui il limite*

$$\lim_{n\to\infty} n a_n$$

esiste ed è finito. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

La serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

Esercizio 12. *Sia* $\alpha > 0$ *un numero reale positivo. Usando la disuguaglianza*

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \quad \textit{per ogni} \quad n \in \mathbb{N},$$

mostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^n} = 0.$$

Come conseguenza, mostrare che per ogni numero reale $0 < x < 1$ *si ha*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$

Esercizio 13. *Sia* x *un numero reale tale che* $0 < x < 1$ *e sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la successione*

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{1-x}.$$