Mathématiques outils pour les sciences et l'ingénierie 1

Cahier d'exercices A

– –

NOM:

– –

Prénom:

– –

Numéro d'étudiant :

– –

Parcours:

– –

Bozhidar Velichkov
Laboratoire Jean Kuntzmann, Université Grenoble Alpes
`bozhidar.velichkov@univ-grenoble-alpes.fr`
`www.velichkov.it`

Table des matières

Exercice 43 (**TD**). Exercice à faire en classe.
Exercice 17 (**E**). Exercice d'entraînement.
Exercice 73 (**A**). Exercice d'approfondissement.
Exercice 102 (**PEF**). Exercice de préparation à l'examen final.

1 Nombres complexes

1.1 Nombres complexes sous forme algébrique

Exercice 1 (TD). *Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :*

$(1+i)^2 =$

$(2-i)^2 =$

$(3-2i)^2 =$

$(a+ib)^2 =$

$(1+i)(4-i) =$

$(1-i)(2+3i) =$

$(1+i)^3 =$

$(1-2i)^3 =$

$(1+3i)(1-3i) =$

$(3-4i)(3+4i) =$

$(1+3i)^2+(1-3i)^2 =$

Exercice 2 (E). *Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :*

$(1-i)^2 =$

$(3-i)^2 =$

$(1+2i)^2 =$

$(4+3i)^2 =$

$(a-ib)^2 =$

$(2+i)(4+3i) =$

$(3+2i)(2-5i) =$

$(2+3i)^3 =$

$(1-4i)(1+4i) =$

$(2+3i)(2-3i) =$

$(a+bi)(a-bi) =$

$(a+bi)^2+(a-bi)^2 =$

Exercice 3 (TD). *Simplifier les expressions suivantes :*

$Re\,(4+7i) =$ $\qquad$ $Re(-\sqrt{7}+2i) =$

$Im\,(2+3i) =$ $\qquad$ $Im(1-2i) =$

$Re\left[(1+i)(2+i)\right] =$

$Im\left[(1-i)(3+i)\right] =$

$Re\left[(1+2i)^2\right] - \left[Re\,(1+2i)\right]^2 =$

$Im\left[(3-i)^2\right] - \left[Re\,(2+i)\right]^2 =$

Exercice 4 (E). *Simplifier les expressions suivantes :*

$Re\left[i(1+i)\right] =$

$Im\left[(1-2i)^2\right] - \left[Im\,(1-i)\right]^3 =$

$Im\left[(2+i)^2\right] - \left[Re\,(2+i)\right]^2 =$

Exercice 5 (TD). *Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :*

$\dfrac{1-5i}{1+i} =$

$\dfrac{2+i}{1-i} =$

$\dfrac{3+i}{2-i} =$

$\dfrac{1-i}{1+2i} =$

Exercice 6 (E). *Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :*

$\dfrac{1+i}{3+4i} =$

$\dfrac{a+ib}{a-ib} =$

$\dfrac{3+2i}{3-2i} =$

$\dfrac{(2-i)^2}{(1+i)^2} =$

1.2 Nombres complexes sous forme exponentielle

Exercice 7 (TD). *Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :*

$e^{2i\pi} =$ $\quad$ $e^{i\pi} =$ $\quad$ $e^{-i\pi} =$

$e^{i\frac{\pi}{3}} =$

$2\,e^{i\frac{2\pi}{3}} =$

$e^{i\frac{\pi}{4}} =$

$e^{i\frac{\pi}{6}} =$

$2\,e^{i\frac{7\pi}{6}} =$

Exercice 8 (E). *Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :*

$e^{-i\frac{\pi}{2}} =$ $\quad$ $e^{i\frac{\pi}{2}} =$ $\quad$ $e^{i\frac{3\pi}{2}} =$

$e^{-i\frac{\pi}{3}} =$

$e^{i\frac{3\pi}{4}} =$

$e^{i\frac{5\pi}{6}} =$

$e^{-i\frac{\pi}{6}} =$

Exercice 9 (TD). *Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :*

$i =$ $\qquad$ $-1 =$ $\qquad$ $-i =$

$\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}} =$ $\qquad$ $\dfrac{1}{e^{i\frac{\pi}{4}}} =$ $\qquad$ $(e^{i\frac{\pi}{6}})^{-2} =$

$(e^{i\frac{\pi}{3}})^5 =$ $\qquad$ $(e^{i\frac{\pi}{3}})^7 =$

$\left(\overline{2e^{i\frac{\pi}{7}}}\right)^{-3} =$ $\qquad$ $\overline{\left(\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{-2}} =$

$$\left(\frac{4e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^{-2} =$$

$$\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{3\,e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^{-1} =$$

$-2e^{i\frac{\pi}{3}} =$ $\qquad$ $ie^{-i\frac{\pi}{6}} =$

$-ie^{i\frac{\pi}{4}} =$ $\qquad$ $(-i)^7 =$

$$\frac{\left(ie^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6}{\left(-\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{-2}} =$$

Exercice 10 (E). *Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :*

$(e^{i\frac{3\pi}{4}})^3 =$ $\qquad$ $(2e^{-i\frac{\pi}{6}})^{-3} =$

$\dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{(e^{i\frac{\pi}{8}})^2} =$ $\qquad$ $\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^3 =$

$$\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^6\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^6 =$$

$\left(\overline{3e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^2 =$ $\qquad$ $\overline{\left(2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{-2}} =$

$$\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\,e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^{-2} =$$

$$\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5}{\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^7\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^4} =$$

$$\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{-3}\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4 =$$

1.3 Forme algébrique et forme exponentielle

Exercice 11 (TD). *Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :*

$1+i=$ $\quad$ $1-i=$ $\quad$ $\dfrac{1}{1+i}=$

$-2+2i=$ $\quad$ $(1+i)^9=$

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=$

$i+\sqrt{3}=$

$\dfrac{1+i}{i+\sqrt{3}}=$

$\dfrac{(-1+i)^4}{1+i\sqrt{3}}=$

$(1-i\sqrt{3})^{10}=$

$\dfrac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i\sqrt{3})^5}=$

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{17}=$

Exercice 12 (E). *Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :*

$\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)=$

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\dfrac{1}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}=$

$(1+i)e^{i\frac{\pi}{3}}=$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}-i}=$

$\dfrac{1-i}{i-\sqrt{3}}=$

$\dfrac{(\sqrt{3}+i)^8}{(\sqrt{3}-i)^8}=$

$\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{57}=$

1.4 Équations du second degré à coefficients complexes

Exercice 13 (TD). *Trouver les solutions des équations suivantes :*

$X^2 + 3 = 0$

$X^2 - X + 6 = 0$

$X^2 - 4X + 5 = 0$

$X^2 - 2X + 4 = 0$

$Z^2 = 8 - 6i$

$Z^2 = -3 + 4i$

$Z^2 = 7 + 24i$

$Z^2 = 9 + 40i$

Exercice 14 (E). *Trouver les solutions des équations suivantes :*

$$Z^2 = 7 - 24i \qquad et \qquad Z^2 = 3 + 4i.$$

Exercice 15 (A). • *Résoudre l'équation* $Z^2 = 1 + i$.
• *Mettre sous forme algebrique le nombre complexe* $e^{i\frac{\pi}{8}}$.

Exercice 16 (TD). *Résoudre les équations suivantes.*

$z^2 + (1 - 5i)z + 2i - 6 = 0$

$z^2 - (3 + 4i)z + 7i - 1 = 0$

$2z^2 + (5 + i)z + 2 + 2i = 0$

$z^2 - (3 + 2i)z + 5 + 5i = 0$

Nombres complexes. Exercices complémentaires

Exercice 17 (A). *Trouver les valeurs du paramètre réel $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le nombre complexe z a module $|z| = 1$. Pour les valeurs de a trouvées, mettre z sous forme exponentielle.*

$$(a)\ z = \frac{(1+i)}{(1-ai)}\ ; \qquad (b)\ z = \frac{(1+i)^2}{(1+ai)}\ ; \qquad (c)\ z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2(\sqrt{3}+2i)^2}{7(\sqrt{3}+ai)^2}\ ; \qquad (d)\ z = \frac{a+2i}{1-ai}\ .$$

Exercice 18 (A). *Montrer que pour $z, w \in \mathbb{C}$, nous avons :*

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Donner une interprétation géométrique.

Exercice 19 (A). *Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Montrer que $\dfrac{z+i}{1+iz}$ est un nombre réel si et seulement si $|z| = 1$.*

Exercice 20 (A)(Feuilles de TD MAT116). *On considère les nombres complexes $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$.*

1. *Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.*
2. *Déterminer les écritures sous formes algébriques et exponientielles de $z_1 z_2$.*
3. *En déduire la valeur exacte de $\sin \dfrac{\pi}{12}$ et $\cos \dfrac{\pi}{12}$.*

Exercice 21 (A)(Feuilles de TD MAT116). *Résoudre de deux façons différentes :*

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et en déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 22 (A)(Feuilles de TD MAT116). *Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.*
a) Calculer $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$;
b) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{5}$ et de $\sin \frac{\pi}{5}$.

Exercice 23 (A)(Feuilles de TD MAT116). *On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.*

1. *Trouver les racines troisièmes de l'unité et les exprimer en fonction de j.*
2. *Les représenter sur le cercle trigonométrique.*
3. *Montrer que la somme des racines troisièmes de 1 vaut 0.*
4. *Trouver les racines troisièmes de $-8i$.*
5. *Résoudre $z^n + 1 = 0$.*

Exercice 24 (A). *Déterminer les nombres complexes z tels que*

$$(a)\quad z^2 + |z| - 2 = 0\,; \qquad (b)\quad z|z| - 2z = i\,; \qquad (c)\quad z^2 = \bar{z}\,; \qquad (d)\quad z^2 - z = |z|^2 - |z|\,.$$

Exercice 25 (A). *Déterminer les nombres complexes z et w tels que*

$$(a)\quad \begin{cases} zw^2 = 1 \\ z^2 + w^4 = 2 \end{cases} \qquad\qquad (b)\quad \begin{cases} z\bar{w} = i \\ |z|^2 w + z = 1. \end{cases}$$

Exercice 26 (A)(Feuilles de TD MAT116). *Déterminer et représenter l'ensemble des nombres complexes z tels que :*

(a) $|1-z| \leq \dfrac{1}{2}$; *(b)* $|(1-i)z - 3i| = 3$; *(c)* $Re(1-z) \leq 2$; *(d)* $Re(iz) \geq 1$;

(e) $\left|1 - \dfrac{1}{z}\right|^2 = 2$; *(f)* z^7 *et* $\dfrac{1}{z^2}$ *soient conjugués ;* *(g)* $\dfrac{|z-3|}{|z+3|} > 2$; *(h)* $\dfrac{|z-3|}{|z-5|} < 1$.

2 Sommes et produits

2.1 Introduction

Exercice 27 (**TD**). *Calculer les sommes et les produits.*

$\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k =$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{3}(2k+1) =$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k^2 =$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{3}(2k+1) =$
$\displaystyle\sum_{k=0}^{2} 2^k =$	$\displaystyle\prod_{k=1}^{4} k =$
$\displaystyle\sum_{k=-2}^{2} k =$	$\displaystyle\prod_{k=2}^{4} k =$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{3} 5 =$	$\displaystyle\prod_{k=1}^{5} 2 =$

Exercice 28 (**TD**). *Écrire les sommes et les produits suivants en utilisant les symboles* $\sum$ *et* $\prod$

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 =$

$4+5+6+7+8+9 =$

$0+1+2+3+4+5 =$

$3+3+3+3+3+3 =$

$2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7 =$

$1\times \frac{1}{2}\times \frac{1}{3}\times \frac{1}{4}\times \frac{1}{5} =$

$7\times 7\times 7\times 7\times 7\times 7 =$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} =$

$2+4+6+8+10+12+14+16+18+20 =$

$3+5+7+9+11+13+15+17+19+21 =$

$1+3+5+7+9+11+13+15 =$

Exercice 29 (**TD**). *Écrire la somme de tous les nombres pairs de* 2 *à* 100 *en utilisant le symbole* $\sum$

$$2+4+6+8+10+\cdots+98+100 =$$

Exercice 30 (**TD**). *Écrire les sommes et les produits suivants en utilisant les symboles* $\sum$ *et* $\prod$

Exemple : $a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $\qquad \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \times a_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} a_k$

$a_0 + \sum_{k=1}^{n+2} a_k =$ $\qquad \sum_{k=0}^{3} a_k + \sum_{k=4}^{n} a_k =$

$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k =$ $\qquad a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+2} =$

$\frac{1}{10} \prod_{k=1}^{10} k =$ $\qquad \frac{1}{3} \prod_{k=3}^{7} k =$

$\frac{\prod_{k=1}^{10} 2^k}{\prod_{k=1}^{3} 2^k} =$ $\qquad \frac{\prod_{k=1}^{10} 3^k}{\prod_{k=7}^{10} 3^k} =$ $\qquad \frac{\prod_{k=1}^{2n+1} 3^k}{\prod_{k=1}^{n} 3^k} =$

$\sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{4} 2^k =$ $\qquad \sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n+2} k =$

$\sum_{k=1}^{n+4} k - \sum_{k=1}^{n-1} k =$ $\qquad \sum_{k=1}^{3n+2} k - \sum_{k=2n}^{3n+2} k =$

2.2 Sommes et produits à termes constantes

Exercice 31 (**TD**)(Compter le nombre des terms)**.** *Calculer les sommes et les produits.*

$\sum_{k=1}^{n} 5 =$ $\qquad \sum_{k=1}^{n+2} 7 =$

$\sum_{k=2}^{n} 6 =$ $\qquad \sum_{k=0}^{n} 4 =$

$\prod_{k=0}^{n+3} 5 =$ $\qquad \sum_{k=n}^{2n+1} 8 =$

Exercice 32 (**E**). *Calculer les sommes et les produits.*

$\sum_{k=0}^{n-1} 3 =$ $\qquad \prod_{k=3}^{n+1} 2 =$ $\qquad \sum_{k=m}^{n} a =$

$\prod_{k=3}^{n+1} 2 =$ $\qquad \prod_{k=n+1}^{3n+5} 7 =$ $\qquad \sum_{k=n-2}^{2n+2} 8 =$

Exercice 33 (PEF). *Mettre sous forme algébrique les nombres complexes*

$$\prod_{k=1}^{4n+3} i =$$

$$\prod_{k=1}^{8n+5} (1+i) =$$

$$\prod_{k=3}^{200} e^{i\pi/3} =$$

2.3 Factorielle et changement des variables

Exercice 34 (TD). *Calculer les sommes et les produits.*

$$\prod_{k=1}^{n+2} k = \qquad\qquad \prod_{k=3}^{n} k =$$

$$\prod_{k=1}^{n} 3k^2 =$$

$$\prod_{k=2}^{n} (k-1) =$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{3} =$$

$$\prod_{k=2}^{n} k(k+1) =$$

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+2)}{2} =$$

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k-1} =$$

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k(k+1)}{k-1} =$$

Exercice 35 (E). *Calculer les sommes et les produits.*

$$\prod_{k=2}^{n+1} 5k =$$

$$\prod_{k=1}^{n+2} (k+3) =$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} =$$

$$\prod_{k=2}^{n} (k-1)(k+1) =$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} =$$

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k^2-1} =$$

Exercice 36 (TD). *Calculer les sommes et les produits.*

$$\sum_{k=1}^{n} \log(k+1) =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \log \frac{1}{k} =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \log(2k^3) =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \Big(2 \log k + \log(k+1)\Big) =$$

Exercice 37 (E). *Calculer les sommes et les produits.*

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\log 3 + 3 \log k\Big) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(2 \log k - \log(k+1)\Big) =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \Big(\log \frac{k+1}{3} + \log \frac{2}{k}\Big) =$$

Exercice 38 (A). *Écrire le produit suivant en utilisant le symbol* $\prod$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\right) =$$

– –

Exercice 39 (A). *Calculer les produits suivants.*

$$\prod_{k=1}^{n} 2k =$$

– –

$$\prod_{k=1}^{n}(2k+1) =$$

– –

2.4 Progressions géométriques et arithmétiques

Exercice 40 (TD)(Somme de progression géométrique)**.** *Calculer les sommes.*

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \qquad\qquad \sum_{k=0}^{n+2} 7^k =$$

– –

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = \qquad\qquad \sum_{k=2}^{n} 5^k =$$

– –

$$\sum_{k=0}^{n}(-2)^k =$$

– –

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3k+2} =$$

– –

$$\sum_{k=1}^{n+1} 7^{2k+1} =$$

– –

$$\sum_{k=0}^{n+2} \frac{1}{2^k} =$$

– –

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{3^{k+2}} =$$

– –

$$\sum_{k=0}^{2n-1} 3^{k/2} =$$

– –

$$\sum_{k=1}^{n+1} 3^k 5^{2-k} =$$

Exercice 41 (**E**)(Somme de progression géométrique)**.** *Calculer les sommes.*

$$\sum_{k=1}^{n} 3^{3k-1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n+2} \frac{1}{3^{k-2}} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{1+3k} 3^{-2(k+1)} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k 3^{k+2}}{7^{k+1}} =$$

$$\sum_{k=2}^{n+2} (-3)^k =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi k}{n}} =$$

Exercice 42 (**TD**)(Somme de progression arithmétique)**.** *Calculer les sommes.*

$$\sum_{k=1}^{n} 4k =$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+5) =$$

$$\sum_{k=0}^{n+2} 3k =$$

$$\sum_{k=2}^{n} (k+4) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k-2) =$$

$$\sum_{k=2}^{2n} \frac{k}{2} =$$

$$\sum_{k=1}^{3n} (2k-1) =$$

Exercice 43 (**E**)(Somme de progression arithmétique)**.** *Calculer les sommes.*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-k}{3} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} (ak+b) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (3-k) =$$

$$\sum_{k=1}^{2n} 3(k+1) =$$

$$\sum_{k=2}^{3n} \frac{2-k}{3} =$$

Exercice 44 (**A**)**.** *En utilisant les formules* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ *calculer les sommes suivantes.*

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k^2+1) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+2)(3k-2) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k+1) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3+1}{k+1} =$$

2.5 Binôme de Newton

Exercice 45 (**TD**)**.** *Calculer les sommes.*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k+1} 5^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{2n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^{k} 3^{-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{5^k}{2^{n-k}} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k-n} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{k} 3^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^{k} 4^{n-k} =$$

Exercice 46 (E). *Calculer les sommes.*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^{k-n} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k} 3^{2n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{2-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{5^k}{2^{2k}} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (3^k)^2 =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{k} 3^{n+k} =$$

Exercice 47 (**TD**)(Exercice récapitulatif)**.** *Calculer les sommes suivantes :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-2k}{5} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} 3^{k-2} 2^{3-k} =$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+3}{k+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{3^k 2^{n-k}}{5^k} =$$

$$\prod_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{k} j \Big) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k} 2^{2n-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{2n} (k+2) =$$

$$\sum_{k=2}^{n} 2^{2-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{2n+k} 5^{2n-k} =$$

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} =$$

Exercice 48 (**A**)**.** *Calculer les sommes*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^k 3^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} 2^k 3^{n-k} =$$

2.6 Sommes et produits de nombres complexes

Exercice 49 (PEF). *Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.*

$$\sum_{k=1}^{n}(1+2ik) =$$

$$\sum_{k=1}^{10}(2+ik) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{5k}{2+i} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+i}{1+i} =$$

Exercice 50 (PEF). *Calculer le module des nombres complexes*

$$z_1 = \prod_{k=1}^{n}\frac{ki}{(\sqrt{k}+i)^2} \qquad et \qquad z_2 = \prod_{k=1}^{n}\frac{ki}{(\sqrt{k}+i)^2}.$$

$|z_1| =$

$|z_2| =$

Exercice 51 (**PEF**)**.** *Mettre sous forme algébrique et forme exponentielle les nombres complexes*

$$\prod_{k=1}^{20} e^{ik\pi/3} =$$

$$\prod_{k=1}^{7} 2e^{ik\pi/8} =$$

$$\prod_{k=1}^{6} (1+i)^k =$$

Exercice 52 (**PEF**)**.** *Mettre sous forme algébrique le nombre complexe*

$$\sum_{k=0}^{7} \left(-2+\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^k =$$

Exercice 53 (**PEF**)**.** *Mettre sous forme algébrique et forme exponentielle le nombre complexe*

$$\sum_{k=0}^{7} \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^k =$$

$$\sum_{k=0}^{12} (-1+e^{i\pi/3})^k =$$

2.7 Sommes télescopiques

Exercice 54 (A). *En utilisant l'identité*

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+a} = \frac{a}{k(k+a)},$$

calculer les sommes suivantes.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} =$

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} =$

Exercice 55 (A). *En utilisant l'identité*

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

calculer la somme

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} =$

Exercice 56 (A). *Calculer la somme*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k(k-1)}{(k+1)!} =$$

Exercice 57 (A). *On considère une expérience à deux issues possibles : positive (P) et négative (N). Soit $p \in]0,1[$ la probabilité de P. On répète plusieurs fois cette expérience dans les mêmes conditions et de façon indépendante.*

(a) Calculer la probabilité p_k que la première expérience positive est la k-ième.

(b) Soit X la probabilité que parmi les 100 premières expériences au moins une est positive. Exprimer X en fonction de $p_1, \dots, p_{100}$ et en fonction de p.

(c) Soit Y la probabilité que toutes les 100 premières expériences sont négatives. Exprimer Y en fonction de p.

(d) En utilisant le fait que $X + Y = 1$ comparer les résultats obtenus en (b) et (c).

Exercice 58 (A). *Exprimer en fonction de x et n les sommes suivantes :*

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{n} \sin(xk)\,; \qquad (b) \quad \sum_{k=1}^{n} \sin(x(2k+1))\,; \qquad (c) \quad \sum_{k=1}^{n} k\cos(kx)\,.$$

3 Géométrie et algèbre linéaire

3.1 Déterminants d'ordre deux et trois

Exercice 59 (TD). *Calculer les déterminants suivants :*

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 1+i & 1 \\ 3i & -1-i \end{vmatrix} =$

Exercice 60 (E). *Calculer les déterminants suivants :*

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 21 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} & 1+i \\ 1-i & e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{vmatrix} =$

Exercice 61 (TD). *Trouver les valeurs du paramètre t pour lesquelles les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.*

$\overrightarrow{u} = (1-t, 2+t)$, $\overrightarrow{v} = (3,4)$

$\overrightarrow{u} = (5t, 6)$, $\overrightarrow{v} = (6t, 7)$

$\overrightarrow{u} = (2,1)$, $\overrightarrow{v} = (3-t, 2-t)$

Exercice 62 (E). *Trouver les valeurs du paramètre t pour lesquelles les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.* (a) $\overrightarrow{u} = (-1-t, 5+t)$, $\overrightarrow{v} = (1,-1)$ $\qquad$ (b) $\overrightarrow{u} = (1-t, 1)$, $\overrightarrow{v} = (3, 1-t)$

Exercice 63 (TD). *Calculer les déterminants suivants :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 6 & b & 0 \\ 7 & 1 & c \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Exercice 64 (E). *Calculer les déterminants suivants :*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} =$$

– –

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

– –

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} =$$

– –

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} =$$

– –

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} =$$

– –

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} =$$

– –

$$\begin{vmatrix} X & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ X & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

– –

$$\begin{vmatrix} X & 1 & X \\ 1 & 1 & 2 \\ X & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

– –

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} =$$

– –

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

– –

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

– –

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

– –

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} =$$

– –

3.2 Droites dans le plan

Exercice 65 (TD). *Trouver le point d'intersection M de la droite D_1 avec la droite D_2.*

$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x+y=0\}, \quad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x+y=1\}, \quad M =$

$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x+y=1\}, \quad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x+2y=5\}, \quad M =$

$D_1 = \{(1+4t, 2+t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{(x,y) \ : \ x+2y=11\}, \quad M =$

$D_1 = \{(1+\lambda, 2-\lambda) \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{(x,y) \ : \ x+4y=3\}, \quad M =$

$D_1 = \{(1+t, 2-t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{(1+s, 2+s) \ : \ s \in \mathbb{R}\}, \quad M =$

$D_1 = \{(5-t, 2t-1) \ : \ t \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{(1+s, 2+3s) \ : \ s \in \mathbb{R}\}, \quad M =$

Exercice 66 (E). *Trouver le point d'intersection M de la droite D_1 avec la droite D_2.*

$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x - y = 3\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x + y = 1\}$

– –

$D_1 = \{(1 + 2s, 3 - s) \; : \; \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{(x, y) \; : \; x - 2y + 1 = 0\}$

– –

$D_1 = \{(t - 2, t - 1) \; : \; t \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{(-1 + 2s, 3 - s) \; : \; s \in \mathbb{R}\}$

– –

Exercice 67 (TD). *Trouver l'équation de la droite D passant par les points A et B.*

$A = (1, 2)\ ,\ B = (3, 1)$

– –

$A = (3, 0)\ ,\ B = (2, -1)$

– –

$A = (1, 0)\ ,\ B = (2, 3)$

Exercice 68 (**E**). *Trouver l'équation de la droite D passant par les points A et B.*

$\underline{A = (2, 3)\ ,\ B = (3, 2)}$

— —

$\underline{A = (4, 1)\ ,\ B = (2, 2)}$

— —

$\underline{A = (-2, 1)\ ,\ B = (1, 3)}$

— —

$\underline{A = (1, 2)\ ,\ B = (0, -1)}$

— —

Exercice 69 (**TD**). *Trouver le point d'intersection M de la droite D_1, passant par les points A et B, avec la droite D_2 passant par les points E et F, où* $\underline{A = (0, 1)\ ,\ B = (4, 3),\ E = (1, 3)\ ,\ F = (3, 1)}$.

— —

Exercice 70 (**E**). *Trouver le point d'intersection M de la droite D_1, passant par les points A et B, avec la droite D_2 passant par les points E et F, où* $\underline{A = (2, 0)\ ,\ B = (4, 4),\ E = (1, 1)\ ,\ F = (5, 3)}$.

3.3 Produit scalaire, distance et orthogonalité

Exercice 71 (TD). *Calculer le produit scalaire des vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$*.*

$\overrightarrow{u} = (1,5)$, $\overrightarrow{v} = (3,1)$

$\overrightarrow{u} = (\cos\alpha, -\sin\alpha)$, $\overrightarrow{v} = (\sin\alpha, \cos\alpha)$

$\overrightarrow{u} = (2,3)$, $\overrightarrow{v} = (-3,2)$

$\overrightarrow{u} = (1,0,2)$, $\overrightarrow{v} = (-4,7,2)$

$\overrightarrow{u} = (-2,0,1)$, $\overrightarrow{v} = (0,3,8)$

$\overrightarrow{u} = (3,2,-1)$, $\overrightarrow{v} = (2,1,5)$

$\overrightarrow{u} = (1,2,-1,2)$, $\overrightarrow{v} = (3,1,1,-3)$

Exercice 72 (TD). *Déterminer les valeurs du paramètre* t *pour lesquelles les deux vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux.*

$\overrightarrow{u} = (t-1, 2t-3)$, $\overrightarrow{v} = (3,-1)$

$\overrightarrow{u} = (3t, 2+t, -t)$, $\overrightarrow{v} = (1,1,2)$

$\overrightarrow{u} = (t-1, 2t, 2)$, $\overrightarrow{v} = (1,2,-1)$

Exercice 73 (TD). *Trouver la projection du point M sur la droite D, dans les cas suivants :* *(La projection de M est le point $P \in D$ tel que le vecteur $\overrightarrow{MP}$ soit orthogonal à D.)*

$\underline{M = (1,2)\ ,\ D = \{(2t, 1+t)\ :\ t \in \mathbb{R}\}}$

— —

$\underline{M = (1,3)\ ,\ D = \{(4-t, 2+2t)\ :\ t \in \mathbb{R}\}}$

— —

$\underline{M = (1,5)\ ,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x - y = 2\}}$

— —

$\underline{M = (1,-3)\ ,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x + 2y + 3 = 0\}}$

— —

$\underline{M = (-1,1)\ ,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ -2x + y = 3\}}$

— —

$\underline{M = (1,0,1)\ ,\ D = \{(2t, t-1, -t+4)\ :\ t \in \mathbb{R}\}}$

Exercice 74 (E). *Trouver la projection du point M sur la droite D, dans les cas suivants :*
(La projection de M est le point $P \in D$ tel que le vecteur $\overrightarrow{MP}$ soit orthogonal à D.)

$M = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x + y = 3\}$

$M = (4, 0)$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 3x - y = 2\}$

$M = (1, -2, 1)$, $D = \{(t - 2, 1 - 2t, 2t + 1) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 75 (TD). *Calculer la norme $|\overrightarrow{u}|$ du vecteur $\overrightarrow{u}$.*

$\overrightarrow{u} = (3, 4)$

$\overrightarrow{u} = (-x, 1)$

$\overrightarrow{u} = (1, -2, 2)$

Exercice 76 (TD). *Calculer la distance entre les points A et B.*

$A = (3, 4)$, $B = (2, 1)$

$A = (1, 6)$, $B = (4, 2)$

$A = (3, 1, 2)$, $B = (1, -1, 1)$

Exercice 77 (A). *On considère dans $\mathbb{R}^2$ le parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u} = (a, b) \neq (0, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (c, d) \neq (0, 0)$, c'est-à-dire le parallélogramme $EFGH$, où $E = (0, 0)$, $F = (a, b)$, $G = (a + c, b + d)$ et $H = (c, d)$.*

(a) Trouver la projection P de H sur la droite D déterminée par les points E et F.

(b) Calculer la distance entre P et H.

(c) Calculer l'aire du $EFGH$.

3.4 Aire et volume

Exercice 78 (TD). *Calculer l'aire du triangle ABC*

$A = (1, 0),\ B = (2, 3), C = (4, 4)$

$A = (0, 1),\ B = (2, 1), C = (-1, 2)$

Exercice 79 (TD). *Calculer l'aire du triangle déterminé par les droites D_1, D_2 et D_3.*
$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x + y = 0\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 2x - y = 2\},$
$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 4x + y + 2 = 0\}.$

Exercice 80 (TD). *Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$*

$A = (0, -1, 0),\ B = (0, 4, 1), C = (1, 4, 2), D = (0, 0, 2)$

$A = (1, 0, 0),\ B = (0, 2, 3), C = (1, 4, 4), D = (0, -1, 0)$

3.5 Produit vectoriel

Exercice 81 (TD). *Calculez le produit vectoriel des vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$.

$\overrightarrow{u} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{v} = (0, 0, -1)$

$\overrightarrow{u} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$

$\overrightarrow{u} = (2, 3, 1)$, $\overrightarrow{v} = (1, 2, 1)$

$\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (-3, 2, 1)$

$\overrightarrow{u} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{v} = (x, 0, -1)$

$\overrightarrow{u} = (\cos\alpha, -\sin\alpha, 0)$, $\overrightarrow{v} = (\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$

$\overrightarrow{u} = (3, 2, -1)$, $\overrightarrow{v} = (2, 1, z)$

$\overrightarrow{u} = (1, 2, 2)$, $\overrightarrow{v} = (3, 1, 1)$

3.6 Droites et plans dans l'espace

Exercice 82 (TD). *Trouver l'équation paramétrique de la droite D passante par le point M et orthogonale au plan P.*

$\underline{M = (1, 2, 4),\ P = \{(x, y, z)\ :\ x + y + z = 3\}}$

$\underline{M = (-1, 0, 0),\ P = \{(x, y, z)\ :\ x + 2y + 3z = 7\}}$

$\underline{M = (1, 2, 4),\ P = \{\alpha(1, 0, 3) + \beta(0, 1, 0)\ :\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}}$

$\underline{M = (1, -2, 1),\ P = \{\alpha(1, -1, 1) + \beta(0, 1, 1)\ :\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}}$

Exercice 83 (TD). *Trouver l'équation implicite du plan $P = \{M + \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}\ :\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$.*

$\underline{M = (1, 0, 1),\ \overrightarrow{u} = (1, 1, 0),\ \overrightarrow{v} = (1, 0, 0)}$

$\underline{M = (1, 0, 0),\ \overrightarrow{u} = (1, 2, 3),\ \overrightarrow{v} = (1, 0, 1)}$

Exercice 84 (TD). *Trouver l'équation implicite du plan P déterminé par les points A, B et C.*

$\underline{A = (1, 0, 1),\ B = (1, 1, 0),\ C = (1, 0, 0)}$

– –

$\underline{A = (2, 0, 1),\ B = (1, 1, 1),\ C = (-1, 0, -1)}$

– –

Exercice 85 (TD). *Trouver l'équation implicite du plan P contenant le point A et la droite D.*

$\underline{A = (1, 0, 1),\ D = \{(1 + t, 2 - t, -1 + t)\ :\ t \in \mathbb{R}\}}$

– –

$\underline{A = (-1, 1, 0),\ D = \{(1 + 2t, t, 1 - t)\ :\ t \in \mathbb{R}\}}$

– –

Exercice 86 (TD). *Trouver une représentation paramétrique du plan P.*

$\underline{P = \{(x, y, z)\ :\ x + y + z = 3\}}$

– –

$\underline{P = \{(x, y, z)\ :\ x + 2y - 2z = 1\}}$

Exercice 87 (TD). *Soient P_1 et P_2 deux plans dans $\mathbb{R}^3$. Trouver la forme paramétrique de la droite $D = P_1 \cap P_2$.*

$\underline{P_1 = \{(x,y,z) \ : \ x+y+z=3\},\ P_2 = \{(x,y,z) \ : \ x-2y+z=0\}}$

– –

$\underline{P_1 = \{(x,y,z) \ : \ x+y-z=-1\},\ P_2 = \{(x,y,z) \ : \ x+2y+3z=0\}}$

– –

$\underline{P_1 = \{(x,y,z) \ : \ 2x-z=1\},\ P_2 = \{(x,y,z) \ : \ x+y=2\}}$

– –

Exercice 88 (TD). *Trouver une représentation implicite de la droite D*

$\underline{D = \{(1,0,2)+t(1,1,1) \ : \ t \in \mathbb{R}\}}$

– –

$\underline{D = \{(1+t, 2-t, t-3) \ : \ t \in \mathbb{R}\}}$

– –

Exercice 89 (A). *On suppose que un rayon de lumière est envoyé depuis le point $A = (1,0,1)$ en direction $\overrightarrow{v}$. Trouvez le vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ pour lequel la réflexion du rayon dans le miroir d'équation $P : x-y+z=1$ passe par le point $T = (3,2,3)$.*

Exercice 90 (A). *On suppose que un rayon de lumière est envoyé depuis le point $A = (1,1,2)$ en direction $\overrightarrow{v} = (-1,-1,-1)$. Trouvez l'équation du plan P passant par le point $M = (2,0,0)$ pour lequel la réflexion du rayon dans le miroir plain P passe par le point $T = (-2,-2,1)$.*