Mathématiques outils pour les sciences et l'ingénierie 1

Cahier d'exercices B

NOM :

Prénom :

Numéro d'étudiant :

Parcours :

Bozhidar Velichkov
Laboratoire Jean Kuntzmann, Université Grenoble Alpes
`bozhidar.velichkov@univ-grenoble-alpes.fr`
`www.velichkov.it`

Table des matières

4 Fonctions d'une variable réelle

4.1 Fonctions continues

Exercice 71. *Déterminer les valeurs du paramètre b pour lesquelles la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.*

$f(x) = 2x + b$, *si* $x \geq 1$; $f(x) = x^2 - bx + 3$, *si* $x < 1$.

– –

$f(x) = bx + 1$, *si* $x \geq 1$; $f(x) = bx^3 + 2x - 3$, *si* $x < 1$.

– –

$f(x) = bx^2 - x + 1$, *si* $x > 1$; $-bx^2 + x + 1$, *si* $x \leq 1$.

– –

$f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + x + b$, *si* $x \geq 1$; $\dfrac{x^2}{2} - x - 2b$, *si* $x < 1$.

– –

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$, *si* $x > 0$; $x + b$, *si* $x \leq 0$.

– –

$f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-2} - 2}{x-2}$, *si* $x > 2$; $f(x) = x^2 - x + b$, *si* $x \leq 2$.

Exercice 72. *Déterminer les valeurs du paramètre b pour lesquelles la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.*

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1},\ \text{si } x > 3; \quad f(x) = b,\ \text{si } x \leq 3.$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2},\ \text{si } x > 2; \quad f(x) = bx + \frac{1}{2},\ \text{si } x \leq 2.$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x},\ \text{si } x > 0; \quad f(x) = b - \frac{1}{x-1},\ \text{si } x \leq 0.$$

$$f(x) = \frac{(x+1)^{1/3}-1}{x},\ \text{si } x > 0; \quad f(x) = b(x+1)^2,\ \text{si } x \leq 0.$$

$$f(x) = \frac{(2x-1)^{1/3}-1}{x-1},\ \text{si } x > 1; \quad f(x) = \frac{b}{x^2+b},\ \text{si } x \leq 1.$$

Exercice 73. *Déterminer, en fonction du paramètre $a > 0$, si la fonction f admet une extension continue sur $\mathbb{R}$.*

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^4-1},\ \textit{si } x < 1; \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1},\ \textit{si } x > 1.$$

$$f(x) = \frac{3x-3}{\sqrt{3x+1}-2},\ \textit{si } x > 1; \quad f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1},\ \textit{si } x < 1.$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2},\ \textit{si } x < 0; \quad f(x) = \frac{\sqrt{ax+1}-\sqrt{x+1}}{x},\ \textit{si } x > 0.$$

$$f(x) = \frac{(1+ax)^2-1}{(1+x)^2-1},\ \textit{si } x > 0; \quad f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}-1}{\sqrt{1-x}-1},\ \textit{si } x < 0.$$

Exercice 74. *Trouver les valeurs des paramètres a et b pour lesquelles la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.*

$$f(x) = x^2 - x + 3,\ \textit{si } x < 0; \quad f(x) = ax + b,\ \textit{si } 0 \leq x \leq 1; \quad f(x) = -x^2 + 2x + 1,\ \textit{si } x > 1.$$

4.2 Comportement à l'infini

Exercice 75. *Calculer les limites suivantes*

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+5) =$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-5x-2) =$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3-x^2+1} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x+1}) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^3+1}) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{x^2+x+6} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-x+1} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x^2+2} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{x^2+1}} =$

Exercice 76. *Trouver l'asymptote $y(x) = ax + b$ de la fonction f à l'infinie.*

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

$f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$

$f(x) = \dfrac{2x^3 - x}{x^2 + 1}$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$

$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$

$f(x) = \sqrt{4x^2 + x}$

4.3 Fonctions dérivables

Exercice 77. *Trouver l'équation cartésienne de la droite tangente au graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^2$.*

$f(x) = x^2,\ x_0 = 1.$

$f(x) = x^2 - 3x,\ x_0 = 0.$

$f(x) = (x-1)(x-3),\ x_0 = 2.$

$f(x) = -x(x-1)(x-3),\ x_0 = 2.$

Exercice 78. *Déterminer les points $x_0 \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la droite tangente au graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^2$ est orthogonale à la droite D .*

$f(x) = x^2 - x,\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x + y = 0\}.$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1,\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x + y = 7\}.$

Exercice 79 (F)**.** *Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polynôme de dégrée pair. Soit D une droite dans $\mathbb{R}^2$ avec vecteur directeur $\overrightarrow{v} = (a, b)$ tel que $a \neq 0$. Démontrer qu'il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la droite tangente au graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $x_0 \in \mathbb{R}$ est orthogonale à la droite D.*

Exercice 80. *Déterminer les valeurs des paramètres a et b pour lesquelles la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable.*

$f(x) = x^2 + 2x + 1, \ \ si\ x < 1; \quad f(x) = ax + b, \ \ si\ x \geq 1.$

$f(x) = x^2 - x + 3, \ \ si\ x < 2; \quad f(x) = ax + b, \ \ si\ x \geq 2.$

$f(x) = x^2 - x + 1, \ \ si\ x < 1; \quad f(x) = -x^2 + ax + b, \ \ si\ x \geq 1.$

$f(x) = -x^2 + ax + b, \ \ si\ x \leq 1; \quad f(x) = x^2 + 2x - 1, \ \ si\ x > 1.$

$f(x) = ax + b, \ \ si\ x \leq 1; \quad f(x) = \sqrt{3x+1}, \ \ si\ x > 1.$

$f(x) = \dfrac{a}{2-x} + b, \ \ si\ x \leq 1; \quad f(x) = \sqrt{5x-1}, \ \ si\ x > 1.$

$f(x) = \dfrac{a}{3-2x} + b, \ \ si\ x \leq 1; \quad f(x) = \sqrt{2x^2-1}, \ \ si\ x > 1.$

4.4 Les dérivées des fonctions rationnelles

Exercice 81. *Calculer les dérivées suivantes*

$(3x+5)' =$ $\quad$ $(3x^2-4x+5)' =$ $\quad$ $(x^n - nx)' =$

$\left(\dfrac{1}{3x+2}\right)' =$

$\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)' =$

$\left(\dfrac{x-2}{2x+3}\right)' =$

$\left(\dfrac{1-x}{x+3}\right)' =$

$\left(\dfrac{x}{x^2+3x+1}\right)' =$

Exercice 82. *Calculer les dérivées des fonctions f et g. Trouver les valeurs des paramètres $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la fonction $F :]-1,+\infty[$ est dérivable, où* $F(x) = \begin{cases} f(x), & si \ -1 < x \leq 0, \\ g(x), & si \ x > 0. \end{cases}$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3+1} \quad et \quad g(x) = \frac{x(x+a)}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x+1}} \quad et \quad g(x) = \frac{x^2+ax+b}{\sqrt{x}+1}$$

Exercice 83 (F)**.** *Trouver une formule explicite, en fonction de X et n, pour les sommes suivantes :*

$(a)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}$ $\qquad$ $(b)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kX^{k}$ $\qquad$ $(c)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2X^{k}.$

Exercice 84. *Calculer les dérivées suivantes*

$(\sqrt{3x+4})' =$ $\left(\sqrt{x^2-4x}\right)' =$

$\left(\sqrt{x^2-4x}\right)' =$ $(\sqrt{x^n+1})' =$

$\left((x^2-x)^{1/3}\right)' =$ $\left((2x+1)^{1/7}\right)' =$

$\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' =$ $\left(\left(\frac{1}{x+1}\right)^3\right)' =$

$\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)' =$

$\left(\sqrt{x+\sqrt{3x}}\right)' =$

$\left(\sqrt{3x+\sqrt{2+x^2}}\right)' =$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) =$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) =$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) =$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{x+y}\right) =$

Exercice 85 (F)**.** *Soit $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non nul. Calculer, en fonction de x_0, y_0, v_x et v_y, la dérivée par rapport à t de la fonction $f(t) = F(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y)$. Trouver $\overrightarrow{v}$ tel que $f'(0) = 0$. Dessiner l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ F(x,y) = F(x_0,y_0)\}$ dans le plan et donner une interpretation géométrique de la droite D déterminée par le point (x_0,y_0) et le vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.*

(*a*) $F(x,y) = x^2+y^2, \quad x_0 = 1,\ y_0 = 1;$ (*b*) $F(x,y) = x^2+2y^2, \quad x_0 = 2,\ y_0 = 1;$

(*c*) $F(x,y) = 3x^2+y^2, \quad x_0 = -1,\ y_0 = 1;$ (*d*) $F(x,y) = x^2+y^4, \quad x_0 = 1,\ y_0 = 1;$

(*e*) $F(x,y) = \dfrac{1}{x^2+2y^2}, \quad x_0 = 2,\ y_0 = 1.$

Comparer les résultats de (a) et (d), et (b) et (e).

4.5 Les dérivées des fonctions trigonométriques et l'exponentielle

Exercice 86. *Calculer les dérivées suivantes :*

$(x \sin x)' =$

$\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' =$ $\qquad$ $\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)' =$

$\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' =$

$(x \tan x)' =$

$\left(\sqrt{1+\cos x}\right)' =$

$\left(\dfrac{1}{1+\cos^2 x}\right)' =$

$(\sin(3x))' =$ $\qquad$ $(\cos(6x))' =$

$(\sin(3x) + 2\cos(3x))' =$

$(\cos(2x) - \sin(2x))' =$

$(\sin(2x))'' =$

$(\cos(3x))'' =$

$(\cos(x^n))' =$ $\qquad$ $\left(\sin \sqrt{x}\right)' =$

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial}{\partial y}\cos(xy)\right] =$

Exercice 87. *Trouver les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles :*

(1) *la fonction $f(x) = \sin(ax)$ est solution de l'équation différentielle $f''(x) + 4f(x) = 0$.*

(2) la fonction $f(x) = \cos(ax)$ est solution de l'équation différentielle $f''(x) + 9f(x) = 0$.

---

(3) la fonction $f(x) = 2\sin(ax) + 3\cos(ax)$ est solution de l'équation différentielle $f''(x) + f(x) = 0$.

Exercice 88. *Calculer les dérivées suivantes :*

$\left(\dfrac{1}{e^x+3}\right)' =$ $\qquad$ $\left(\sqrt{e^x+1}\right)' =$

$\left(e^{3x}\right)' =$ $\qquad$ $\left(e^{-7x}\right)' =$

$\left(e^{x^2}\right)' =$ $\qquad$ $\left(e^{\sqrt{x}}\right)' =$

$(e^{\cos x})' =$ $\qquad$ $\left(e^{\sin x}\right)' =$

$\left(\dfrac{e^{2x}}{e^{3x}+1}\right)' =$

$\left(\dfrac{e^{-x}}{e^{2x}+1}\right)' =$

$(e^x \sin(x))' =$

$\left(e^{2x}\cos(3x)\right)' =$

$\left((x^2+x+1)e^x\right)' =$

Exercice 89. *Trouver les valeurs des paramètres $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ pour lesquelles :*

(1) *la fonction $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation différentielle $f''(x) - 4f(x) = 0$.*

– –

(2) *la fonction $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation différentielle $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 0$.*

– –

(3) *la fonction $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation différentielle $f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0$.*

– –

(4) *la fonction $f(x) = xe^{ax}$ est solution de l'équation différentielle $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 0$.*

– –

$(5)^F$ *la fonction $f(x) = e^{ax}\cos(bx)$ est solution de l'équation différentielle $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$.*

$(6)^F$ *la fonction $f(x) = e^{ax}\sin(bx)$ est solution de l'équation différentielle $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$.*

4.6 Les dérivées des fonctions réciproques : ln, arcsin, arccos, arctan

Exercice 90. *Calculer les dérivées suivantes*

$(x\ln x - 1)' =$

– –

$\left(e^{1+\ln x}\right)' =$ $\qquad\qquad$ $(\sin(\ln x))' =$

– –

$\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)' =$

– –

$\big(\ln(e^{2x} - e^x + 1)\big)' =$

– –

$\big(\ln(x^2)\big)' =$ $\qquad\qquad$ $(\ln(\cos x))' =$

– –

$(\ln(\ln x))' =$

– –

$\big(\ln(1 + \sin(x^2))\big)' =$

– –

$(x^x)' =$

– –

– –

Exercice 91. *Démontrer que la fonction f est bijective et calculer la dérivée de la fonction réciproque*

$f : \mathbb{R} \to]1, +\infty[\,,\ f(x) = e^x + 1$

– –

$f : \mathbb{R} \to]3, +\infty[\,,\ f(x) = e^{2x} + 3$

– –

$f : \mathbb{R} \to]1, +\infty[\,,\ f(x) = e^{-7x} + 1$

$f :]0, +\infty[\to]1, +\infty[\,,\ f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Démontrer l'identité $\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1.$

Exercice 92. *Calculer les dérivées suivantes*

$\left((1+x)^{2x}\right)' =$

$\left(x^{1+x}\right)' =$

$\left(x^{\ln x}\right)' =$

$((\sin x)^{\cos x})' =$

Exercice 93. *Calculer les dérivées suivantes :*

$(\arcsin(x))' =$ $(\arccos(x))' =$

$(\arccos(2x))' =$ $(\arcsin(7x))' =$

$\big(\arcsin(\sqrt{1+x})\big)' =$

$\big(\arcsin(\sqrt{1+2x})\big)' =$

$(\arctan x)' =$ $(\arctan(3x))' =$

$(\arctan(2x+1))' =$

$\big(\arctan(\sqrt{x})\big)' =$

$\left(x\arctan x - \dfrac{1}{2}\log(1+x^2)\right)' =$

Exercice 94. *Démontrer que la fonction f est bijective et calculer la dérivée de la fonction réciproque*

$f : \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\to]1, +\infty[,\ \ f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

$f : \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[\ ,\ f(x) = \dfrac{1}{1+\cos(2x)}$

4.7 La règle de l'Hôpital

Exercice 95. *Calculer les limites suivantes*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x+\sin x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{\sin x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x-3x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-\cos x}{\sin x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x+ax^3} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-xe^{x}}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} =$$

Exercice 96. *Calculer les limites suivantes*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2) - \cos x}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{\sin x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(3x)}{x^2 + x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(2x)}{1 - \sqrt{1-x}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(e^x - 1)}{\sqrt{x+1} - 1} =$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}}{x+7} =$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x}}{x^3+1} =$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} =$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} =$$

4.8 Sommes et produits de fonctions

Exercice 97. *Calculer les limites*

$$\lim_{x\to 0}\left(\prod_{k=2}^{9}\frac{\sin(kx)}{\tan((k-1)x)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\prod_{k=1}^{12}\frac{\arcsin((k+1)x)}{e^{kx}-1}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\prod_{k=2}^{100}\frac{\sin((k-1)x)}{\sqrt{kx+1}-1}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\arctan(kx)}{e^{2x}-1}\right)=$$

Exercice 98. *Exprimer en fonction de* $n \in \mathbb{N}$ *le produit* $\lim_{x\to 0}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(\frac{x}{2}+\sqrt{1+\sin(kx)}\right)}{\sin(kx)}\right)$,

et calculer le résultat pour $n = 7$.

Exercice 99. *Calculer les limites*

$$\lim_{x\to 0}\left(\prod_{k=2}^{9} \frac{\ln(1+kx)\sin x}{x(e^{kx}-x-1)}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\prod_{k=2}^{8} \frac{\sin((k-1)x)\sin(2x)}{x(e^{kx}-1)}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{x\arcsin(kx)}{\sin((k-1)x)(e^{2x}-1)}\right)=$$

_ _

_ _

_ _

_ _

Exercice 100. *Calculer les limites*

$$\lim_{x\to+\infty}\det\begin{pmatrix}\sqrt{x^2+1} & \sqrt{4x^2-1}\\ x & 2x\end{pmatrix}=$$

_ _

_ _

_ _

_ _

$$\lim_{x\to+\infty}\det\begin{pmatrix}\sqrt{x+1} & \sqrt{x^2+1}\\ 1 & \sqrt{x}\end{pmatrix}=$$

_ _

_ _

_ _

_ _

$$\lim_{x\to+\infty}\det\begin{pmatrix}\sqrt{x+1} & \sqrt{x+3}\\ \sqrt{x} & \sqrt{x+1}\end{pmatrix}=$$

_ _

_ _

_ _

5 Primitives et intégrales indéfinies

5.1 Intégration par changement de variable

Exercice 101. *Soit $y(x)$ une fonction donnée. Calculer les primitives suivantes.*

$$\int y'(x)y(x)\,dx = \int y'(x)y(x)\,dx = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + C = \frac{y(x)^2}{2} + C$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\,dx =$$

$$\int \frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}}\,dx =$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx =$$

$$\int y'(x)e^{y(x)}\,dx =$$

$$\int y'(x)\sin y(x)\,dx =$$

$$\int y'(x)\cos y(x)\,dx =$$

$$\int y'(x)(1 + \tan^2 y(x))\,dx =$$

$$\int \frac{y'(x)}{\sqrt{1 - y(x)^2}}\,dx =$$

$$\int -\frac{y'(x)}{\sqrt{1 - y(x)^2}}\,dx =$$

$$\int \frac{y(x)'}{1 + y(x)^2}\,dx =$$

$$\int y(x)'y(x)\cos(y(x)^2)\,dx =$$

$$\int y'(x)e^{y(x)}\cos(e^{y(x)})\,dx =$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\cos(\ln y(x))\,dx =$$

Exercice 102. *Calculer les primitives suivantes.*

$$\int (x^4 - 3x + 1)\, dx =$$

$$\int (x+1)^2\, dx =$$

$$\int (x-1)^3\, dx =$$

$$\int \sqrt{x+2}\, dx =$$

$$\int \sqrt[3]{x+1}\, dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\, dx =$$

$$\int \frac{1}{(2x+1)^2}\, dx =$$

$$\int \sin(2x)\, dx =$$

$$\int \sin(1-x)\, dx =$$

$$\int \sin(3x-2)\, dx =$$

$$\int \cos(5x+1)\, dx =$$

$$\int e^{2x}\, dx =$$

$$\int e^{7x+3}\, dx =$$

$$\int x e^{x^2} dx =$$

$$\int x^2 e^{x^3+1} dx =$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx =$$

Exercice 103 (Changement de variable)**.** *Calculer les primitives suivantes.*

$$\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} =$$

$$\int \frac{dx}{3+27x^2} =$$

$$\int \frac{dx}{4+x^2} =$$

$$\int \cos x \, e^{\sin x} dx =$$

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx =$$

$$\int x(x^2+1)^3 \, dx =$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx =$$

$$\int \frac{dx}{x+1} dx =$$

$$\int \frac{dx}{2x+3} dx =$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx =$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} =$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x+1)} =$$

5.2 Intégration de fonctions rationnelles

Exercice 104. *Calculer les primitives suivantes.*

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} =$$

$$\int \frac{1}{(x+2)(x+3)} =$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} =$$

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+2} =$$

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6} =$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+4} =$$

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+1} =$$

$$\int \frac{x-3}{x^2-6x+9}dx =$$

$$\int \frac{(x-3)+4}{x^2-6x+9}dx =$$

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+1}dx =$$

Exercice 105. *Calculer les primitives suivantes.*

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx =$$

$$\int \frac{x+3}{x^2+1}dx =$$

$$\int \frac{x+5}{x^2+2x+2}dx =$$

$$\int \frac{2-x}{x^2-2x+2}dx =$$

$$\int \frac{3x+1}{9x^2+6x+2}dx =$$

$$\int \frac{x^2+3x+4}{x^2+1}dx =$$

$$\int \frac{x^2+2x}{x^2-1}dx =$$

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^2}dx =$$

Exercice 106 (Intégration de fonctions trigonométriques)**.** *Calculer les primitives suivantes.*

$$\int \sin x \cos x \, dx =$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx =$$

$$\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x} dx =$$

$$\int \frac{\sin x}{2+\cos x} dx =$$

$$\int \sin^3 x \, dx =$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx =$$

$$\int \cos(2x) \, dx =$$

$$\int \cos^2 x \, dx =$$

$$\int \sin(3x)\sin(5x) dx =$$

$$\int \cos(7x)\cos(2x) dx =$$

$$\int \sin(2x)\cos(5x) dx =$$

5.3 Intégration par parties

Exercice 107. *Calculer les primitives suivantes.*

$$\int xe^x dx =$$

$$\int x \sin x \, dx =$$

$$\int \ln x \, dx =$$

$$\int \arctan x \, dx =$$

$$\int \ln^2 x \, dx =$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx =$$

$$\int x \ln x \, dx =$$

$$\int e^x \sin x \, dx =$$

5.4 Exercices récapitulatifs

Exercice 108. *Calculer les primitives suivantes.*

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx =$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\cos(1+\ln^2 x)\,dx =$$

$$\int \cos^3 x\,dx =$$

$$\int \frac{1}{\sin x}dx =$$

$$\int x\cos(3x)\,dx =$$

$$\int \ln(x^2+1)\,dx =$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx =$$

$$\int (x+1)\sin(2x)dx =$$

$$\int x^2 \arctan x\,dx =$$