Université Grenoble Alpes | **Année** 2017-2018
Licence 1**ère année - MAT102** | **Mercredi 20 décembre 2017**

Examen
Durée : 2 heures

Les calculatrices, téléphones portables et documents sont interdits.
Nous rappelons qu'il faut prouver les résultats énoncés.
La qualité de la rédaction sera prise en compte : nous vous conseillons d'indiquer les numéros des exercices et des questions, et de souligner ou encadrer les résultats.

Exercice 1 ($\sim$5=1+2+2 points).

(*a*) *Mettre sous forme algébrique le nombre complexe* $\dfrac{e^{i\pi}(2-i)}{(1+i)e^{i\pi/2}}$ *et calculer son module.*

(*b*) *Mettre le nombre complexe*

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-1+i\sqrt{3}\right)^k 2^{n-k},$$

sous la forme $z_n = \rho\, e^{in\theta}$, *où* $\rho > 0$ *et* $\theta \in [0, 2\pi[$.

(*c*) *Mettre sous forme exponentielle et forme algébrique le nombre complexe*

$$w = \sum_{k=1}^{19} \binom{19}{k} \left(-1+i\sqrt{3}\right)^k 2^{3-k}.$$

Exercice 2 ($\sim$6=1+2+2+1 points). *Soit* $M = (1,2) \in \mathbb{R}^2$ *un point donné.*

(*a*) *Trouver l'équation cartésienne de la droite* D, *passant par* M, *avec vecteur directeur* $\overrightarrow{v} = (2,3)$.

(*b*) *Trouver la projection* A *de* M *sur la droite*

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x+y=1\right\}.$$

(*c*) *Trouver la projection* B *de* M *sur la droite*

$$D_2 = \left\{(4+t, 1-2t) \;:\; t \in \mathbb{R}\right\}.$$

(*d*) *Trouver la distance entre les points* A *et* B *et l'aire du triangle* ABM.

Exercice 3 ($\sim$5=1+4 points).

(*a*) *Calculer la limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3\,x^2}-1}{x^2}.$$

(*b*) *Exprimer en fonction de* $n \in \mathbb{N}$ *la limite*

$$\lim_{x\to 0} \prod_{k=2}^{n} \frac{\ln\left(1+k^2x\right)}{\sin\left((k^2-1)x\right)},$$

et calculer le résultat pour $n = 9$.

Exercice 4 ($\sim$4=2+2 points). *Calculer les intégrales*

$$(a) \quad \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1+e^{3x}}}\,dx \qquad et \qquad (b) \quad \int \ln(x+1)\,dx.$$

Solutions détaillées

Exercice 1. (a) Comme $e^{i\pi} = -1$ et $e^{i\pi/2} = i$, on a

$$\frac{e^{i\pi}(2-i)}{(1+i)e^{i\pi/2}} = \frac{-(2-i)}{i(1+i)} = \frac{-2+i}{-1+i}.$$

Pour mettre le nombre complexe sous forme algébrique, on utilise le conjugué $\overline{-1+i} = -1-i$.

$$\frac{-2+i}{-1+i} = \frac{(-2+i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{(-2+i)(-1-i)}{2} = \frac{2-i+2i-i^2}{2} = \frac{3+i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Finalement, on calcule le module

$$\left|\frac{e^{i\pi}(2-i)}{(1+i)e^{i\pi/2}}\right| = \frac{|e^{i\pi}|\,|2-i|}{|1+i|\,|e^{i\pi/2}|} = \frac{|2-i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{2^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{5/2}.$$

Exercice 1. (b)

En appliquant la formule de binôme de Newton

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n,$$

avec $a = -1 + i\sqrt{3}$ et $b = 2$, on obtient

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1+i\sqrt{3})^k 2^{n-k} = (-1+i\sqrt{3}+2)^n = (1+i\sqrt{3})^n.$$

En mettant $(1+i\sqrt{3})$ sous forme exponentielle on a

$$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2 \qquad \text{et} \qquad Arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

Donc

$$z_n = (1+i\sqrt{3})^n = (2e^{i\pi/3})^n = 2^n e^{in\pi/3}.$$

Exercice 1. (c)

$$\begin{aligned} w &= \sum_{k=1}^{19} \binom{19}{k} (-1+i\sqrt{3})^k 2^{3-k} = 2^3 \sum_{k=1}^{19} \binom{19}{k} (-1+i\sqrt{3})^k 2^{-k} \\ &= 2^3 \left(\sum_{k=0}^{19} \binom{19}{k} (-1+i\sqrt{3})^k 2^{-k} - 1 \right) = 2^3 \left(\sum_{k=0}^{19} \binom{19}{k} \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^k - 1 \right). \end{aligned}$$

Après la formule de binôme de Newton on a

$$\sum_{k=0}^{19} \binom{19}{k} \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{19} \binom{19}{k} \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^k 1^{19-k} = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 1\right)^{19} = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{19}.$$

Donc

$$w = 2^3 \left(\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{19} - 1 \right).$$

En utilisant le fait que $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$ on obtient

$$w = 2^3\left(\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{19} - 1\right) = 2^3\left(\left(e^{i\pi/3}\right)^{19} - 1\right) =$$
$$= 2^3\left(e^{19i\pi/3} - 1\right) = 2^3\left(e^{i\pi/3} - 1\right) = 2^3\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} - 1\right) = 8\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

On a que $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3}$ et donc

- la forme algébrique de w est: $w = -4 + 4\sqrt{3}i$.
- la forme exponentielle de w est: $w = 8e^{2i\pi/3}$.

Exercice 2. (a)

La droite D déterminée par le point $M(1,2)$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{v} = (2,3)$ a comme équation cartésienne

$$D\ :\ \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y-2 & 3 \end{vmatrix} = (x-1)3 - 2(y-2) = 3x - 2y + 1 = 0.$$

Exercice 2. (b)

On cherche le point $A = (x_A, y_A)$ tel que:

- le vecteur $\overrightarrow{MA}$ est orthogonal à la droite D_1, $\overrightarrow{MA} \perp D_1$,
- A est un point sur la droite D_1, $A \in D_1$.

La droite D_1 est déterminée par l'équation cartésienne $D_1\ :\ x + y = 1$. Donc, un vecteur directeur de D_1 et le vecteur $\overrightarrow{v_1} = (-1,1)$. On sait que

$$\overrightarrow{MA} \perp D_1 \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{v_1} \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0.$$

Comme $\overrightarrow{MA} = (x_A - 1, y_A - 2)$ et $\overrightarrow{v_1} = (-1,1)$, on a

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{v_1} = (x_A - 1, y_A - 2) \cdot (-1,1) = (x_A - 1)(-1) + (y_A - 2) = -x_A + y_A - 1.$$

Donc, les coordonnées de la projection A sont données par la solution du système

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} \perp D_1 \\ A \in D_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_A + y_A - 1 = 0 \\ x_A + y_A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 1 \end{cases}.$$

En conclusion, la projection de M sur D_1 est le point $A = (0,1)$.

Exercice 2. (c)

On cherche le point $B = (x_B, y_B)$ tel que:

- le vecteur $\overrightarrow{MB}$ est orthogonal à la droite D_2, $\overrightarrow{MB} \perp D_2$,
- B est un point sur la droite D_2, $B \in D_2$.

La droite D_2 est déterminée par l'équation paramétrique $D_2 \ : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$.

Donc, un vecteur directeur de D_2 et le vecteur $\overrightarrow{v_2} = (1, -2)$. On sait que

$$\overrightarrow{MB} \perp D_2 \ \Leftrightarrow \ \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{v_2} \ \Leftrightarrow \ \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0.$$

Comme $\overrightarrow{MB} = (x_B - 1, y_B - 2)$ et $\overrightarrow{v_2} = (1, -2)$, on a

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{v_2} = (x_B - 1, y_B - 2) \cdot (1, -2) = (x_B - 1) + (y_B - 2)(-2) = x_B - 2y_B + 3.$$

Donc, les coordonnées de la projection B sont données par la solution du système

$$\begin{cases} \overrightarrow{MB} \perp D_2 \\ B \in D_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 2y_B + 3 = 0 \\ x_B = 4 + t \\ y_B = 1 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4 + t) - 2(1 - 2t) + 3 = 0 \\ x_B = 4 + t \\ y_B = 1 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t + 5 = 0 \\ x_B = 4 + t \\ y_B = 1 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x_B = 3 \\ y_B = 3 \end{cases}$$

En conclusion, la projection de M sur D_2 est le point $B = (3, 3)$.

Exercice 2. (d)

La distance entre les points A et B est donnée par

$$|\overrightarrow{AB}| = |(3 - 0, 3 - 1)| = |(3, 2)| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

On sait que l'aire du triangle ABM est donnée par la formule:

$$Aire(ABM) = \frac{1}{2} \left| \det \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right) \right|.$$

On a que $\overrightarrow{MA} = (0 - 1, 1 - 2) = (-1, -1)$ et $\overrightarrow{MB} = (3 - 1, 3 - 2) = (2, 1)$. Donc

$$\det \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)1 - 2(-1) = 1.$$

Finalement, on a que l'aire du triangle ABM est

$$Aire(ABM) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3. (a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1 + 3x^2} - 1)(\sqrt{1 + 3x^2} + 1)}{(\sqrt{1 + 3x^2} + 1)x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{(\sqrt{1 + 3x^2} + 1)x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{\sqrt{1 + 3x^2} + 1} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 3. (b)

$$\lim_{x \to 0} \prod_{k=2}^{n} \frac{\ln(1 + k^2 x)}{\sin((k^2 - 1)x)} = \prod_{k=2}^{n} \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + k^2 x)}{\sin((k^2 - 1)x)}.$$

On a $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+k^2x)}{\sin((k^2-1)x)}=\dfrac{\ln 1}{\sin 0}=\dfrac{0}{0}$. En appliquant la règle de l'Hôpital on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+k^2x)}{\sin((k^2-1)x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln(1+k^2x)\right)'}{\left(\sin((k^2-1)x)\right)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{k^2}{1+k^2x}}{(k^2-1)\cos((k^2-1)x)}=\frac{k^2}{(k^2-1)\cos(0)}=\frac{k^2}{k^2-1}.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\prod_{k=2}^{n}\frac{\ln(1+k^2x)}{\sin((k^2-1)x)}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2}{k^2-1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}=\frac{\left(\prod_{k=2}^{n}k\right)^2}{\left(\prod_{k=2}^{n}(k-1)\right)\left(\prod_{k=2}^{n}(k+1)\right)}$$

On sait que $\prod_{k=2}^{n}k=\prod_{k=1}^{n}k=n!$

Pour calculer $\prod_{k=2}^{n}(k-1)$ et $\prod_{k=2}^{n}(k+1)$ on change les variables:

- On pose $j=k-1$. Donc
$$\prod_{k=2}^{n}(k-1)=\prod_{j=1}^{n-1}j=(n-1)!$$

- On pose $l=k+1$. Donc
$$\prod_{k=2}^{n}(k+1)=\prod_{l=3}^{n+1}l=\frac{1}{2}\prod_{l=1}^{n+1}l=\frac{(n+1)!}{2}$$

Donc, on obtient

$$\lim_{x\to 0}\prod_{k=2}^{n}\frac{\ln(1+k^2x)}{\sin((k^2-1)x)}=\frac{(n!)^2}{(n-1)!\frac{(n+1)!}{2}}=\frac{2\,(n!)^2}{(n-1)!\,(n+1)!}$$

On sait que $(n+1)!=(n+1)\,n!$ et $n!=n\,(n-1)!$. Donc

$$\frac{2\,(n!)^2}{(n-1)!\,(n+1)!}=\frac{2n!\,n\,(n-1)!}{(n-1)!\,(n+1)\,n!}=\frac{2n}{n+1}.$$

Finalement, on a

$$\lim_{x\to 0}\prod_{k=2}^{n}\frac{\ln(1+k^2x)}{\sin((k^2-1)x)}=\frac{2n}{n+1}.$$

et, pour $n=9$,

$$\lim_{x\to 0}\prod_{k=2}^{9}\frac{\ln(1+k^2x)}{\sin((k^2-1)x)}=\frac{9}{5}.$$

Exercice 4. (a)

On pose $y = e^{3x}$. Donc $dy = (e^{3x})'\,dx = 3e^{3x}\,dx$ et $dx = \frac{1}{3e^{3x}}\,dy = \frac{1}{3y}\,dy$.

$$\int \frac{y}{\sqrt{1+y}}\frac{1}{3y}\,dy = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1+y}}\,dy.$$

On pose $z = y + 1$. Donc $dz = dy$ et on a

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1+y}}\,dy = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = \frac{1}{3}\int z^{-1/2}\,dz = \frac{1}{3}\frac{z^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{3}z^{1/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{e^{3x}+1} + C.$$

Exercice 4. (b)

On applique la formule d'integration par parties

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v'(x)u(x)\,dx$$

avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x+1)$. Donc on a

$$\begin{aligned}
\int \ln(x+1)\,dx &= \int x'\ln(x+1)\,dx \\
&= x\ln(x+1) - \int x\Big(\ln(x+1)\Big)'\,dx \\
&= x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}\,dx \\
&= x\ln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\,dx \\
&= x\ln(x+1) - \int 1\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx \\
&= x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C \\
&= (x+1)\ln(x+1) - x + C.
\end{aligned}$$