

Esame scritto - appello di marzo 2020

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari (e altri dispositivi connessi),  
calcolatrici, libri, dispense, appunti.

Nome:

Cognome:

Matricola:

**Esercizio 1** (2 punti). Scrivere in forma algebrica il numero complesso

$$\frac{(1 + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^2}{1 + 2i}$$

**Esercizio 2** (2 punti). Scrivere in forma esponenziale il numero complesso

$$\frac{(1 + e^{i\frac{2\pi}{3}})^{25}}{(1 - e^{i\frac{3\pi}{2}})^{49}}$$

**Esercizio 3** (2 punti). Calcolare la produttoria in funzione del numero naturale  $n \geq 1$

$$\prod_{k=2}^n \frac{k+2}{2(k+1)}$$

**Esercizio 4** (2 punti). Calcolare la serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} 3^k 2^{1-2k}$$

**Esercizio 5** (2 punti). Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{4^n n^4 + 2^n (n^2 + 3)^2} - \sqrt{4^n n^4 - 2^n (n^2 - 1)(n^2 + 1)} \right)$$

**Esercizio 6** (2 punti). Calcolare l'integrale indefinito

$$\int e^x \cos(3x) dx$$

Risposta Es. 1.

$$-1 - 2i$$

Risposta Es. 2.

$$\frac{1}{(\sqrt{2})^{49}} e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Risposta Es. 3.

$$\frac{n+2}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

Risposta Es. 4.

$$\frac{9}{2}$$

Risposta Es. 5.

$$+\infty$$

Risposta Es. 6.

$$\frac{1}{10} e^x \cos(3x) + \frac{3}{10} e^x \sin(3x)$$

**Esercizio 7 (2 punti).** Indicare le serie che convergono

$(A) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$    
  $(B) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{(2n+1)!}$    
  $(C) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)^n}$   
 $(D) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!+1)^2}{2^n(n+1)!}$    
  $(E) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n)^n}{2^{2n}n!}$

**Risposta Es. 7.**

A, B

**Esercizio 8 (2 punti).** Indicare le serie che convergono

$(A) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{2n^2+1}}$    
  $(B) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)^2}{(2n+1)^2}$    
  $(C) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$   
 $(D) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$    
  $(E) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

**Risposta Es. 8.**

A, E

**Esercizio 9 (2 punti).** Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{e^{2x^2} - 1}$$

**Risposta Es. 9.**

$\frac{9}{4}$

**Esercizio 10 (2 punti).** Per quali valori dei parametri  $a, b \in \mathbb{R}$  la funzione  $f(x) = (ax + b)e^{-3x}$  è soluzione di

$$f''(x) - 5f(x) = (2x + 1)e^{-3x} \quad ?$$

**Risposta Es. 10.**

$a = \frac{1}{2}, b = 1$

**Esercizio 11 (2 punti).** Scrivere lo sviluppo di Taylor nel punto  $x = 0$  fino all'ordine 3

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$$

**Risposta Es. 11.**

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)$$

**Esercizio 12 (2 punti).** Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x - 2} dx$$

**Risposta Es. 12.**

$$\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\cos x + 2}{\cos x - 1} \right| + C_1$$

**Esercizio 13 (2 punti).** Scrivere lo sviluppo di Taylor nel punto  $x = 0$  fino all'ordine 3

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1 - \sin x}$$

**Risposta Es. 13.**

$$1 + 3x + 5x^2 + \frac{37}{6}x^3 + o(x^3)$$

**Esercizio 14 (2 punti).** Trovare l'asintoto obliquo  $y = ax + b$  della funzione  $f(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 3x + 3}$$

**Risposta Es. 14.**

$$y = 2x - \frac{3}{4}$$

**Esercizio 15 (2 punti).** Trovare il massimo

della funzione  $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$  su  $[0, +\infty)$ .

**Risposta Es. 15.**

$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{e^{1/4}}$

31

Esame scritto - appello di febbraio 2020

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari (e altri dispositivi connessi),  
calcolatrici, libri, dispense, appunti.

Nome:

Cognome:

Matricola:

Esercizio 1 (2 punti). Scrivere in forma esponenziale  
il numero complesso

$$\frac{-1}{(\sqrt{3} + i)^2}$$

Risposta Es. 1.

$$\frac{1}{4} e^{2i\pi/3}$$

Esercizio 2 (2 punti). Scrivere in forma algebrica  
il numero complesso

$$\frac{(\sqrt{2} + e^{i\frac{3\pi}{4}})^{61}}{(1 - e^{i\frac{5\pi}{3}})^{33}}$$

Risposta Es. 2.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esercizio 3 (2 punti). Calcolare la produttoria  
in funzione del numero naturale  $n \geq 1$

$$\prod_{k=2}^n \frac{3(k-1)}{k+1}$$

Risposta Es. 3.

$$\frac{2 \cdot 3^{n-1}}{n(n+1)}$$

Esercizio 4 (2 punti). Calcolare la serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} 2^{2k-1} 5^{1-k}$$

Risposta Es. 4.

$$8$$

Esercizio 5 (2 punti). Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{2^{2n}(n+1)^2 + (2n+3)4^n} - \sqrt{2^{2n}(n+2)^2 - (2n-3)2^n} \right)$$

Risposta Es. 5.

$$1$$

Esercizio 6 (2 punti). Calcolare l'integrale indefinito

$$\int e^x \sin(2x) dx$$

Risposta Es. 6.

$$\frac{1}{5} e^x \sin(2x) - \frac{2}{5} e^x \cos(2x)$$

Esercizio 7 (2 punti). Indicare le serie che convergono

(A)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n^n}{(n+1)^n}$  (B)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2+1)^n}{(n^3+1)^n}$  (C)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$

(D)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n^2}}{(n+1)!}$  (E)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Esercizio 8 (2 punti). Indicare le serie che convergono

(A)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3 + \sin n}}$  (B)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{2n+1}$  (C)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n)^2}{(2n)^3}$

(D)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}}$  (E)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

Esercizio 9 (2 punti). Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - (1+x)^2}{\sqrt{\cos(3x)}} - 1$$

Esercizio 10 (2 punti). Per quali valori dei parametri  $a, b \in \mathbb{R}$  la funzione  $f(x) = (ax+b)e^{2x}$  è soluzione di

$$f''(x) + f(x) = (10x+2)e^{2x} \quad ?$$

Esercizio 11 (2 punti). Scrivere lo sviluppo di Taylor nel punto  $x=0$  fino all'ordine 3

$$f(x) = \sin(xe^x)$$

Esercizio 12 (2 punti). Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 3 \sin x + 2} dx$$

Esercizio 13 (2 punti). Scrivere lo sviluppo di Taylor nel punto  $x=0$  fino all'ordine 3

$$f(x) = \frac{2 - e^x}{\cos x}$$

Esercizio 14 (2 punti). Trovare l'asintoto obliquo  $y = ax + b$  della funzione  $f(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 1}}{1+x}$$

Esercizio 15 (2 punti). Trovare il massimo

della funzione  $f(x) = \left(x^2 + 3x - \frac{3}{2}\right)e^{-2x}$  su  $[-2, +\infty)$ .

Risposta Es. 7.

B, E

Risposta Es. 8.

A, B

Risposta Es. 9.

$-\frac{4}{9}$

Risposta Es. 10.

$a=2, b=-\frac{6}{5}$

Risposta Es. 11.

$x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

Risposta Es. 12.

$\ln|\sin x - 2| - \ln|\sin x - 1| + C$

Risposta Es. 13.

$1 - x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$

Risposta Es. 14.

~~.....~~  $y = 2x - 3$

Risposta Es. 15.

$x=1, y = \frac{5}{2}e^{-2}$