

## Mathématiques outils pour les sciences et l'ingénierie 1

### Sujets des années précédentes

Les calculatrices, téléphones portables et documents sont interdits.

Nous rappelons qu'il faut prouver les résultats énoncés.

La qualité de la rédaction sera prise en compte : nous vous conseillons d'indiquer les numéros des exercices et des questions, et de souligner ou encadrer les résultats.

### 1 Examen session 1, 2016-2017, durée : 2 heures

**Exercice 1.1.** *Mettre sous forme algébrique et forme exponentielle le nombre complexe*

$$z = \sum_{k=0}^7 e^{ik\pi/3}.$$

**Exercice 1.2.** *Soit  $a \in \mathbb{R}$  un paramètre réel. Soit  $D_1$  la droite déterminée par le point  $M = (3, 3)$  et le vecteur directeur  $\vec{v} = (1, a)$ . Soit  $D_2$  la droite déterminée par les points  $A = (1, 3)$  et  $B = (4, 0)$ .*

(a) *Trouver les équations implicites des droites  $D_1$  et  $D_2$ .*

(b) *Déterminer les valeurs du paramètre  $a \in \mathbb{R}$  pour lesquelles la droite  $D_1$  est orthogonale à la droite  $D_2$ . Pour les valeurs trouvées, déterminer le point d'intersection de la droite  $D_1$  avec la droite  $D_2$ .*

**Exercice 1.3.** *Calculer, en fonction de  $n \in \mathbb{N}$ , la limite*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin x} \det \begin{pmatrix} \sin(kx) & x \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 1.4.** *Calculer les intégrales* (1)  $\int \frac{dx}{x^2 - x}$  *et* (2)  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1 + e^{\sqrt{x}})} dx$ .

### 2 Examen blanc, 2016-2017, durée : 1h30

**Exercice 2.1.** *Mettre sous forme exponentielle et forme algébrique le nombre complexe*

$$z = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} (-1 + i)^k 2^{5-k}.$$

**Exercice 2.2.** *Trouver l'équation implicite et l'équation paramétrique de la droite  $D$  déterminée par les points  $A = (-2, 0)$  et  $B = (2, 2)$ . Trouver la projection  $P$  du point  $M = (-1, 3)$  sur la droite  $D$ .*

**Exercice 2.3.** *Exprimer en fonction de  $n \in \mathbb{N}$  la limite*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \prod_{k=1}^n \left( \frac{\arctan((k+1)x)}{\sqrt{1+kx} - 1} \right).$$

*Calculer le résultat pour  $n = 9$ .*

**Exercice 2.4.** *Calculer les intégrales* (1)  $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$  *et* (2)  $\int \cos(\sqrt{x}) dx$ .

### 3 Examen session 2, 2016-2017, durée : 2 heures

**Exercice 3.1.** Mettre sous forme algébrique et forme exponentielle le nombre complexe

$$z = \sum_{k=0}^{41} e^{-ik\pi/2}.$$

**Exercice 3.2.** Soit  $a \in \mathbb{R}$  un paramètre réel.

- Trouver l'équation implicite de la droite  $D_1$  déterminée par le point  $M_0 = (2, 0)$  et le vecteur directeur  $\vec{v} = (1, a)$ .
- Déterminer la valeur du paramètre  $a \in \mathbb{R}$  pour laquelle la droite  $D_1$  est orthogonale au vecteur  $(2, 2)$ .
- Trouver l'équation implicite de la droite  $D_2$  déterminée par les points  $A = (2, 1)$  et  $B = (1, 3)$ .
- Déterminer le point d'intersection de la droite  $D_1$  avec la droite  $D_2$ .

**Exercice 3.3.** Calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{23} \frac{1}{\arctan x} \det \begin{pmatrix} x & \sin x \\ 2 & k \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3.4.** Calculer les intégrales (1)  $\int (x+1) \cos x \, dx$  et (2)  $\int \frac{dx}{x(7 + \ln x)}$ .

---

### 4 Examen session 1, 2015-2016, durée : 2 heures

**Exercice 4.1.** Mettre sous forme exponentielle et forme algébrique le nombre complexe

$$z = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^k.$$

**Exercice 4.2.** Trouver en fonction du paramètre  $a \in \mathbb{R}$  l'équation de la droite  $D$  déterminée par le vecteur directeur  $\vec{v} = (1, a)$  et le point  $(1, 0)$ .

- Déterminez la valeur du paramètre  $a$  pour laquelle la droite  $D$  contient le point  $(2, 1)$ .
- Déterminez la valeur du paramètre  $a$  pour laquelle la droite  $D$  est orthogonale à la droite  $D_1$  d'équation  $x + 2y = 4$ .

**Exercice 4.3.** Calculer en fonction du paramètre  $a \in \mathbb{R}$  la limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2 \sin(ax))}{x}$ .  
Exprimer en fonction de  $n \in \mathbb{N}$  le produit

$$\prod_{k=1}^n \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2 \sin(kx))}{(k+1)x} \right),$$

et calculer le résultat pour  $n = 7$ .

**Exercice 4.4.** Calculer les primitives (1)  $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 + 3 \sin x}} \, dx$  et (2)  $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \, dx$ .

## 5 Examen session 2, 2015-2016, durée : 2 heures

**Exercice 5.1.** Trouver les valeurs du paramètre réel  $a \in \mathbb{R}$  pour lesquelles le nombre complexe

$$z = \frac{\sqrt{2}(1+i)^3}{(1+ai)^2},$$

a module égale à 1. Pour les valeurs trouvées, mettez les nombres complexes  $z$  sous forme exponentielle.

**Exercice 5.2.** Soit  $D$  la droite passant par les points  $A = (1, 0)$  et  $B = (3, 2)$ .

1. Déterminer la valeur du paramètre réel  $b \in \mathbb{R}$  pour laquelle la droite  $D$  est orthogonale au vecteur  $(-1, b)$ .
2. Trouver une équation implicite pour la droite  $D$ .

**Exercice 5.3.** Calculer en fonction du paramètre réel  $c \geq 1$  la limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{(c-1)x} - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}{x^2}$ .  
Exprimer en fonction de  $n \in \mathbb{N}$  la somme

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{(k-1)x} - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}{x^2},$$

et calculer le résultat pour  $n = 8$ .

**Exercice 5.4.** Calculer les primitives (1)  $\int \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$  et (2)  $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}} dx$ .

---

## 6 Examen blanc, 2015-2016, durée : 1h30

**Exercice 6.1.** Mettre sous forme algébrique les nombres complexes

$$z_1 = \sum_{k=1}^{20} (1+i)^k \quad \text{et} \quad z_2 = \prod_{k=1}^{20} e^{ik\pi/3}.$$

**Exercice 6.2.** Trouver l'équation implicite de la droite  $D$

- orthogonale à la droite  $D_1 : x + y = 2$  et
- passant par le point d'intersection de la droite  $D_2 : 2x - y = 2$  avec la droite  $D_3 : 2x - 4y + 1 = 0$ .

**Exercice 6.3.** Trouver le minimum et le maximum de la fonction  $f(x) = x^{(1-\frac{\ln^2 x}{3})}$  dans l'intervalle  $[e^{-2}, e^2]$ .

**Exercice 6.4.** Soit  $a$  un paramètre réel et soit  $f(x) = \det \begin{bmatrix} \tan x & x \\ 2a & a+1 \end{bmatrix}$ . Trouver les valeurs de  $a$

pour lesquelles  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ .