# Funzioni continue e limiti di funzioni

## Limiti di funzioni

Siano $A$ un insieme di numeri reali, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su $A$.

- Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di aderenza di $A$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $x_\varepsilon$ tale che
$$x_\varepsilon \in A \qquad \text{e} \qquad x_0 - \varepsilon < x_\varepsilon < x_0 + \varepsilon\,.$$
- Diciamo che il numero reale $L \in \mathbb{R}$ è il limite di $f$ in $x_0$, e scriviamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{per ogni} \qquad x \in A \cap (-\delta + x_0, x_0 + \delta).$$
- Diciamo che il limite di $f$ in $x_0$ è più infinito, e scriviamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$f(x) > M \qquad \text{per ogni} \qquad x \in A \cap (-\delta + x_0, x_0 + \delta).$$
- Diciamo che il limite di $f$ in $x_0$ è meno infinito, e scriviamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, se per ogni $M < 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$f(x) < M \qquad \text{per ogni} \qquad x \in A \cap (-\delta + x_0, x_0 + \delta).$$

**Teorema 1.** *Siano $A$ un insieme di numeri reali, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su $A$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di aderenza di $A$. Sia $L \in \mathbb{R}$, $L = +\infty$ oppure $L = -\infty$. Allora*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L,$$
*se e solo se, per ogni successione $(a_n)_{n\geq 1}$ tale che*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \qquad e \qquad a_n \in A \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N},$$
*si ha che*
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L.$$

**Esercizio 2.** *Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \sin(1/x)$. Dimostrare che $f$ non ha limite in zero. (Per esempio, trovare due successioni $a_n$ e $b_n$ che convergono a zero e sono tali che $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \lim_{n\to\infty} b_n$).*

**Esercizio 3.** *Quali delle seguenti funzioni $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ hanno un limite in zero?*

*(a)* $f(x) = \cos(1/x)$; $\qquad f(x) = x\sin(1/x)$; $\qquad f(x) = x^2\cos(1/x)$;

*(b)* $f(x) = \frac{1}{x}$; $\qquad f(x) = \frac{1}{x}\cos(x)$; $\qquad f(x) = \frac{1}{x}\cos(1/x)$;

*(c)* $f(x) = (x^2 + 3x + 1)\sin(1/x)$.

**Esercizio 4.** *Quali delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ hanno un limite in zero?*

*(a)* $f(x) = \sin(1/x)$; $\qquad f(x) = x\sin(1/x)$; $\qquad f(x) = \dfrac{1}{x}$; $\qquad f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

**Proposizione 5.** *Siano $A$ un insieme di numeri reali, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su $A$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di aderenza di $A$. Supponiamo che esiste il limite di $f$ in $x_0$, $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Se $L$ è un numero reale stretamente poisitivo ($L > 0$) allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che*

$$0 < \frac{L}{2} < f(x) \leq 2L \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

*Se invece $L < 0$, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che*

$$2L < f(x) < \frac{L}{2} < 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

**Definizione 6.** *Diciamo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è non-negativa in un intorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$, se esiste $\varepsilon > 0$ tale che*

$$f(x) \geq 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

*Più in generale, diciamo che $f$ ha la proprietà una $\mathcal{P}$ in un intorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$, se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $f(x)$ ha la proprietà una $\mathcal{P}$ per ogni $x \in A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.*

**Teorema 7** (Teorema della permanenza del segno)**.** *Siano $A$ un insieme di numeri reali, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su $A$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di aderenza di $A$. Supponiamo che esiste il limite di $f$ in $x_0$ e poniamo $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$.*

- *Se $f$ è non-negativa in un intorno di $x_0$, allora $L \geq 0$.*
- *Viceversa, se $f$ è non-positiva in un intorno di $x_0$, allora $L \leq 0$.*

**Teorema 8** (Operazioni con limiti)**.** *Siano $A$ un insieme di numeri reali, $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni definite su $A$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di aderenza di $A$. Dimostrare che valgono le proprietà riportate nelle tabella qui sotto.*

| $\lim_{x\to x_0} f(x)$ | $\lim_{x\to x_0} g(x)$ | $\lim_{x\to x_0} (f+g)$ | $\lim_{x\to x_0} fg$ | $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}$ | $\lim_{x\to x_0} \frac{g}{f}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a \in \mathbb{R}$ | $b \in \mathbb{R}$ | $a+b$ | $ab$ | $\frac{a}{b}$, se $b \neq 0$ | $\frac{b}{a}$, se $a \neq 0$ |
| $a > 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $a > 0$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $-\infty$ |
| $a < 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $-\infty$ |
| $a < 0$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-----$ | $0$ | $-----$ |
| $0$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-----$ | $0$ | $-----$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-----$ | $-----$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-----$ | $-----$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $------$ | $-\infty$ | $-----$ | $-----$ |

**Proposizione 9.** *Siano $A$ un insieme di numeri reali, $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni definite su $A$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di aderenza di $A$.*

*(i) Dimostrare che se $g$ è limitata in un intorno di $x_0$ e se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, allora $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.*

*(ii) Dimostrare che se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, allora $f \geq 1$ in un intorno di $x_0$ e $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.*

*(iii) Dimostrare che se $f \geq 1$ in un intorno di $x_0$ e se $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty$.*

**Esercizio 10.** *Dimostrare la proposizione precedente.*

---

## Limiti all'infinito

Sia $A$ un insieme di numeri reali illimitato superiormente, cioè tale che per ogni $R > 0$ esiste $x \in A \cap (R, +\infty)$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su $A$.

- Sia $L \in \mathbb{R}$. Diciamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{per ogni} \qquad x \in A \cap (R, +\infty).$$

- Diciamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, se per ogni $M > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$f(x) > M \qquad \text{per ogni} \qquad x \in A \cap (R, +\infty).$$

- Diciamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, se per ogni $M < 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$f(x) < M \qquad \text{per ogni} \qquad x \in A \cap (R, +\infty).$$

**Teorema 11** (Operazioni con limiti all'infinito)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme illimitato superiormente. Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni definite su $A$. Dimostrare che valgono le proprietà riportate nelle tabella qui sotto.*

| $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ | $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ | $\lim_{x\to+\infty} (f+g)$ | $\lim_{x\to+\infty} fg$ | $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g}$ | $\lim_{x\to+\infty} \frac{g}{f}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a \in \mathbb{R}$ | $b \in \mathbb{R}$ | $a+b$ | $ab$ | $\frac{a}{b}$, se $b \neq 0$ | $\frac{b}{a}$, se $a \neq 0$ |
| $a > 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $a > 0$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $-\infty$ |
| $a < 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $-\infty$ |
| $a < 0$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-----$ | $0$ | $-----$ |
| $0$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-----$ | $0$ | $-----$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-----$ | $-----$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-----$ | $-----$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $------$ | $-\infty$ | $-----$ | $-----$ |

**Esercizio 12.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme di illimitato superiormente e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su $A$. Supponiamo che esiste ed è finito il limite $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Dimostrare che per ogni successioni $(a_n)_{n\geq1}$ tale che*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{e} \qquad a_n \in A \quad \text{per ogni} \quad n \geq 1,$$

*si ha che*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L.$$

---

## Esercizi

**Esercizio 13.** *Siano* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *una funzione e* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una successione di numeri reali positivi. Supponiamo che:*

- *la successione* $a_n$ *è infinitesimale, cioè* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*;*
- *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge, cioè* $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$*, dove* $S_n$ *è la successione delle somme parziali*
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$
- *la funzione* $f$ *ha la proprietà seguente:*
$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \qquad \textit{per ogni coppia di punti} \qquad x, y \in (0, +\infty);$$
- *esiste ed è finito il limite*
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L.$$

*Dimostrare che*
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

**Esercizio 14.** *Sia* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *una funzione tale che*
$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{|x|^2} \qquad \textit{per ogni coppia di punti } x, y \textit{ tale che} \qquad 0 < x \leq y \leq x + 1.$$

*Dimostrare che esiste ed è finito il limite*
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

**Esercizio 15.** *Sia* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *una funzione monotona. Dimostrare che esiste il limite*
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

**Esercizio 16.** *Sia* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *una funzione monotona decrescente e non-negativa. Dimostrare che esiste ed è finito il limite*
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

**Esercizio 17.** *Sia* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *una funzione reale. Supponiamo che esistono e sono finiti i limiti*
$$a = \lim_{x\to\infty} f(x)\sin x \qquad e \qquad b = \lim_{x\to\infty} f(x)\cos x.$$

*Dimostrare che* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ *e che* $a = b = 0$.

**Esercizio 18.** *Sia* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *una funzione tale che*
$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad \textit{per ogni coppia di punti} \quad x, y \in (0, +\infty) \quad \textit{tale che} \quad |x - y| \leq 1.$$

*Supponiamo, inoltre che esiste il limite*
$$L = \lim_{x\to\infty} f(x)\cos(x^2).$$

*Dimostrare che* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

## Funzioni continue

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme di numeri reale e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su $A$.

- Diciamo che la funzione $f$ è continua in $x_0 \in A$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Diciamo che la funzione $f$ è continua su $A$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ per ogni $x_0 \in A$.

**Exemple 19.** *La funzione $f(x) = x$ è continua su $\mathbb{R}$.*

**Proposizione 20.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme di numeri reali e siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni definite su $A$. Se $f$ e $g$ sono continue in $x_0 \in A$, allora anche le funzioni $f + g$ e $fg$ lo sono. Inoltre, se $g(x_0) \neq 0$, allora $g \neq 0$ in un intorno di $x_0$ e la funzione $\frac{f}{g}$ è continua in $x_0$.*

**Teorema 21.** *Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ e tale che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.*

**Lemma 22.** *Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$. Allora $f$ è limitata su $[a, b]$.*

**Teorema 23** (Teorema di Weierstrass)**.** *Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$. Allora $f$ ammette un massimo e un minimo su $[a, b]$, cioè esistono due punti $x_{\max} \in [a, b]$ e $x_{\min} \in [a, b]$ tali che*

$$f(x_{\max}) = \max \big\{ f(x) \,:\, x \in [a, b] \big\},$$

$$f(x_{\min}) = \min \big\{ f(x) \,:\, x \in [a, b] \big\}.$$

**Esercizio 24.** *Sia $n \in \mathbb{N}$. Usando la formula*

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k},$$

*dimostrare che la funzione $f(x) = x^n$ è continua su $\mathbb{R}$.*

**Esercizio 25.** *Sia $n \in \mathbb{N}$. Usando la formula*

$$x - y = (x^{1/n} - y^{1/n}) \sum_{k=0}^{n-1} x^{\frac{k}{n}} y^{\frac{n-1-k}{n}},$$

*dimostrare che la funzione $f(x) = x^{1/n}$ è continua su $[0, +\infty)$.*