



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Laurea Triennale in Matematica

**Esistenza e regolarità dei minimi di un problema
di ottimizzazione di forma**

$$\lambda_1(\Omega) + \int_{\Omega} Q(x)dx$$

Relatore:

Prof: Bozhidar Velichkov

Candidato:

Andrea Rocca

*A Buster e a Sid.
La vostra passeggiata più lunga
sarà il mio cammino
nella vita.*

Indice

Abstract	iii
Introduzione	iv
1 Richiami e risultati preliminari	1
1.1 La simmetrizzazione	4
1.2 Una generalizzazione degli spazi di Sobolev	8
2 Esistenza	13
2.1 Il principio di concentrazione-compattezza	13
2.2 Il teorema di esistenza	17
3 Alcuni risultati di regolarità	25
3.1 Prime proprietà del minimo u	26
3.1.1 Il minimo u è limitato	28
3.1.2 Il minimo u è non-degenere	30
3.2 Il Dominio Ω è limitato	36
3.3 Stima del Laplaciano e conseguenze	37
3.4 Dimostrazione del Teorema 3.1	38
3.5 Stima di densità esterna	40
Ringraziamenti	44

Abstract

Lo scopo di questo elaborato è studiare l'esistenza e la regolarità di un minimo per il problema

$$\lambda_1(\Omega) + \int_{\Omega} Q(x)dx$$

tra i domini Ω di misura assegnata. Nel funzionale considerato, $\lambda_1(\Omega)$ è il primo autovalore dell'operatore $-\Delta$ considerato sul dominio Ω con condizione di Dirichlet e $Q : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione limitata con determinate caratteristiche desiderabili.

La dimostrazione dell'esistenza di un minimo non può essere effettuata sfruttando solamente il metodo diretto del calcolo delle variazioni, visto che l'ambiente su cui è impostato il problema non prevede a priori l'ipotesi di limitatezza per il dominio in cui lavoriamo. Questa difficoltà è superata grazie all'uso del *lemma di concentrazione-compattatezza* introdotto da L.Lions, che garantisce l'esistenza di una soluzione in una classe più ampia di domini generalizzati.

Le proprietà di regolarità del dominio Ω sono studiate grazie ad un opportuno problema variazionale ausiliario. In particolare dimostriamo che Ω è un dominio aperto limitato ed è dunque soluzione del problema originale.

Introduzione

Un problema di ottimizzazione di forma è un problema variazionale nel quale la famiglia di competitori è fatta di *forme*, ossia oggetti geometrici che possono essere scelti come spazi metrici, varietà o domini nello spazio Euclideo. Normalmente un problema di questo tipo si presenta come segue:

$$\min\{\mathcal{F}(\Omega) : \Omega \in \mathcal{A}\}$$

dove

- \mathcal{F} è un *funzionale costo*
- \mathcal{A} è una famiglia ammissibile di forme.

Se esiste $\Omega \in \mathcal{A}$ che realizza il minimo, questo sarà la *forma ottimale*.

Problemi di questo tipo sono di particolare interesse nell'ambito della fisica o dell'ingegneria, dove il funzionale costo \mathcal{F} può rappresentare un'energia ad esempio.

Una classe di problemi di ottimizzazione di forma particolarmente interessanti sono quelli riguardanti gli autovalori di operatori ellittici su delle forme e il loro volume. Grazie a questi è infatti possibile comprendere meglio il legame tra la forma di un dominio euclideo e il loro spettro.

In questo contesto uno degli operatori ellittici che è stato studiato a lungo è l'operatore Laplaciano con condizione di Dirichlet al bordo. In questo caso un generico funzionale spettrale \mathcal{F} si può scrivere come

$$\mathcal{F}(\Omega) = F(\lambda_1(\Omega), \lambda_2(\Omega), \dots, \lambda_k(\Omega)) \tag{1}$$

con $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data.

Nel caso in cui $F(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \lambda_1$ si sa che l'insieme ottimale a misura fissata, grazie a G.Faber in [6] e E.Krahn in [8], è la palla. Nel caso $F(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \lambda_2$ sempre a misura fissata invece, grazie a P.Szegő in [15], sappiamo che l'insieme ottimale è l'unione disgiunta di due palle di equal misura.

Questi casi sono gli unici in cui il minimo è noto esplicitamente. Per ottenere un teorema di esistenza di minimo in generale, storicamente l'approccio seguito è stato quello di limitarsi a studiare forme che fossero contenute in una "*scatola*" D , ossia un dominio limitato in \mathbb{R}^d . Questa ipotesi aggiuntiva permette di ottenere l'esistenza di minimi per funzionali generali sfruttando risultati classici di compattezza nella teoria degli spazi di Sobolev. Infatti un primo grande risultato in questo contesto fu ottenuto da G.Buttazzo

e G.Dal Maso, i quali riuscirono a dimostrare in [3] l'esistenza di una forma ottimale per i problemi di forma

$$\min\{\mathcal{F}(A) + \Lambda|A| : A \subset D, A \text{ quasi-aperto}\}$$

dove \mathcal{F} è del tipo (1) e $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfa ipotesi non troppo limitanti per quanto riguarda la sua semicontinuità e la sua monotonia.

L'esistenza di forme ottime nella classe dei quasi aperti senza il vincolo di contenimento è stata ottenuta solo recentemente da D.Bucur in [2] e da D.Mazzoleni e A.Pratelli in [13]. Per quanto riguarda l'esistenza di forma ottime nella classe degli aperti, T.Briançon e J. Lamboley in [1] riuscirono a dimostrare, nel caso di D connesso, l'esistenza di una forma ottima per il funzionale $\mathcal{F}(\Omega) = \lambda_1(\Omega)$ nella classe $\mathcal{A} := \{|\Omega| = a, \Omega \text{ aperto}, \Omega \subset D\}$ e studiarono inoltre alcune proprietà di regolarità per $\partial\Omega \cap D$.

Al momento manca una teoria della regolarità generale e sono presenti in letteratura solo pochi risultati a questo merito, tra i quali ne troviamo uno ad opera di D.Mazzoleni, S.Terracini e B.Velichkov in [4] dove hanno dimostrato l'esistenza di un insieme ottimo per il seguente problema di forma:

$$\mathcal{F}(\Omega) = \{\lambda_1(\Omega) + \dots + \lambda_k(\Omega) \mid \Omega \subset \mathbb{R}^d \text{ aperto}, |\Omega| = 1\}.$$

In questo elaborato andremo a studiare e ad analizzare alcune proprietà di regolarità per il problema di forma

$$\min\{\mathcal{F}(\Omega) : \Omega \in \mathcal{A}\}$$

dove $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R}^d, |A| = c\}$ con $c \in \mathbb{R}^{>0}$ assegnato e

$$\mathcal{F}(\Omega) = \lambda_1(\Omega) + \int_{\Omega} Q(x) dx$$

con $Q : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ con ipotesi che saranno specificate in seguito.

L'esistenza di un minimo per una versione "preliminare" a questo problema, in cui $Q \equiv \text{cost}$, è riconducibile al problema di Faber-Krahn.

L'elaborato si compone di 3 capitoli di cui riportiamo ora una breve descrizione:

- Nel Capitolo 1 vengono richiamati gli strumenti necessari per quanto riguarda la teoria degli spazi di Sobolev e la simmetrizzazione. In particolare daremo una dimostrazione della disuguaglianza di Faber-Krahn.
- Nel Capitolo 2 viene presentato il Principio di Concentrazione-Compattezza. Dopo aver dato una formulazione equivalente al nostro problema di forma, questo principio sarà uno strumento essenziale per la dimostrazione dell'esistenza di un minimo per il funzionale ausiliario. In questo contesto saranno inoltre specificate ipotesi sufficienti sulla funzione Q .
- Nel Capitolo 3 presenteremo alcuni risultati di regolarità e, in particolare, riusciremo a dire che la forma ottima è un aperto di \mathbb{R}^d . La difficoltà tecnica di questo capitolo consiste principalmente nel lavorare in un insieme che a priori non presenta alcun tipo di proprietà e che quindi necessita di particolare attenzione nella scelta delle variazioni per il nostro funzionale.

Richiami e risultati preliminari

In questo elaborato useremo dei fatti generali di teoria della misura e di Spazi di Sobolev che richiamiamo di seguito. Con \mathcal{L}^d indichiamo la misura di Lebesgue d -dimensionale¹ e con \mathcal{H}^{d-1} la misura di Hausdorff $d - 1$ dimensionale.

Definizione 1.1 - Lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$

Dato un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e $p \in [1, +\infty]$, definiamo lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ come lo spazio delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ tali per cui esistono d funzioni

$$v_1, v_2, \dots, v_d \in L^p(\Omega),$$

tali che per ogni $j = 1, \dots, d$ e per ogni^a $\varphi \in C_C^1(\Omega)$ valga

$$\int_{\Omega} u(x) \partial_j \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} v_j(x) \varphi(x) dx.$$

La funzioni v_1, \dots, v_d sono le *derivate parziali deboli* di u .

^aÈ equivalente richiedere $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$.

Osservazione 1.1

È possibile vedere che se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ allora $u_+ := \max\{u(x), 0\}$ e $u_- := u - u_+$ sono in $W^{1,p}(\Omega)$

Definizione 1.2 - Norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

Lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach dotato della seguente norma:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^d \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Definizione 1.3 - Lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$

Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^d e $p \in [1, +\infty)$. Definiamo lo spazio di Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ come la chiusura delle funzioni $C_C^\infty(\Omega)$ rispetto $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

¹Se chiaro dal contesto scriveremo $|A|$ in luogo di $\mathcal{L}^d(A)$.

Osservazione 1.2

Nel caso $p = 2$ scriveremo $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$.

Definizione 1.4 - Soluzione debole

Data una funzione $g \in H^1(\Omega)$ diciamo che u è *soluzione debole* di $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ se $u \in H^1(\Omega)$, $u - g \in H_0^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 1.5 - Caratterizzazione variazionale delle soluzioni deboli

Sia Ω aperto limitato, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione debole u di

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}.$$

Inoltre u è l'unico minimo del funzionale J_f nell'insieme $\{w + g : w \in H_0^1(\Omega)\}$ dove

$$J_f(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} u f.$$

Definizione 1.6 - Operatore Laplaciano

Data $u \in C^2(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto e x_i base ortonormale di \mathbb{R}^d definiamo:

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Il teorema spettrale per operatori compatti, autoaggiunti e definiti positivi su spazi di Hilbert garantisce il seguente risultato:

Proposizione 1.7

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ di misura finita, esiste una successione di autovalori $\{\lambda_j\}_{j \geq 1}$ e di autofunzioni $\{\phi_j\}_{j \geq 1}$ tale che:

$$\begin{cases} -\Delta \phi_j = \lambda_j \phi_j & \text{in senso debole in } \Omega \\ \phi_j \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \phi_j^2 = 1 \end{cases}.$$

Inoltre vale che:

- $\lambda_j > 0$ per ogni $j \geq 1$.
- $\lambda_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty$.
- $\{\phi_j\}_{j \geq 1}$ è una base di $L^2(\Omega)$ con $\phi_j \in H_0^1(\Omega)$.

Osservazione 1.3

Grazie alla formulazione variazionale possiamo caratterizzare gli autovalori come segue:

$$\lambda_k(\Omega) = \min_{\substack{E_k \subset H_0^1(\Omega) \\ \dim E_k = k}} \max_{v \in E_k, v \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} v^2 dx}.$$

Una prima conseguenza di questo è un risultato di monotonia: dati $\Omega_1 \subset \Omega_2$ vale che $H_0^1(\Omega_1) \subseteq H_0^1(\Omega_2)$ e quindi

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \lambda_k(\Omega_1) \geq \lambda_k(\Omega_2).$$

Inoltre, da un cambio di variabili, segue che se $t\Omega$ è un'omotetia di fattore t di Ω allora

$$\lambda_k(t\Omega) = \frac{\lambda_k(\Omega)}{t^2}.$$

Osservazione 1.4 - Limitatezza autofunzioni

Ricordiamo inoltre che se ϕ_k è l'autofunzione su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ con autovalore $\lambda_k(\Omega)$ allora esiste una costante dimensionale C_d tale che

$$\|\phi_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_d \lambda_k(\Omega)^{\frac{d}{4}}.$$

Un'ulteriore proprietà interessante notata da E.Lieb in [10] è la seguente:

Proposizione 1.8

Siano A, B due sottoinsiemi aperti non vuoti di \mathbb{R}^d e denotiamo con B_x il traslato di B per $x \in \mathbb{R}^d$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in \mathbb{R}^d$ tale che

$$\lambda_1(A \cap B_x) \leq \lambda_1(A) + \lambda_1(B) + \varepsilon.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che, detto $J(f) = \frac{\int |\nabla f|^2}{\int |f|^2}$, vale

$$\lambda_1(A) = \inf\{J(f) | f \in H_0^1(A), f \neq 0\} = \inf\{J(f) | f \in C_c^\infty(A), f \neq 0\}.$$

Siano quindi $f \in C_c^\infty(A), g \in C_c^\infty(B)$ tali che $\int_A f^2 = \int_B g^2 = 1$ e

$$J(f) < \lambda_1(A) + \frac{\varepsilon}{2} \quad J(g) < \lambda_1(B) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideriamo ora $h_x(y) := f(y)g(y-x)$. Chiaramente $h_x \in C_c^\infty(A \cap B_x)$ e

$$\iint |h_x|^2 dy dx = \iint f(y)^2 g(y-x)^2 dy dx = 1$$

Vogliamo ora stimare la quantità $J(h_x)$. Da un conto diretto abbiamo che:

$$|\nabla h_x|^2(y) = |\nabla f|^2(y)g^2(y-x) + f^2(y)|\nabla g|^2(y-x) + \frac{1}{2}(\nabla f^2)(y) \cdot (\nabla g^2)(y-x).$$

Notando che $\frac{1}{2}(\nabla f^2)(y) \cdot (\nabla g^2)(y-x) = -\frac{1}{2}(\nabla f^2)(y) \cdot \nabla_x g^2(y-x)$ si ha che

$$\int -\frac{1}{2}(\nabla f^2)(y) \cdot \nabla_x g^2(y-x) dx = 0.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \iint |\nabla h_x|^2(y) dy dx &= \int |\nabla f|^2(y)g^2(y-x) + \int f^2(y)|\nabla g|^2(y-x) \\ &\leq \lambda_1(A) + \lambda_1(B) + \varepsilon := \lambda. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che

$$\int \left(\int |\nabla h_x|^2 - \lambda \int |h_x|^2 \right) dx < 0$$

e dunque $\lambda \int |h_x|^2 > \int |\nabla h_x|^2 \geq 0$ su un insieme di misura positiva, che è la tesi. \square

Corollario 1.9

Per ogni $\varepsilon > 0$ e $A \subseteq \mathbb{R}^d$ di misura finita esiste $R > 0$ e $y_n \in \mathbb{R}^d$ tale che

$$\lambda_1(A_n \cap B(y_n, R)) \leq \lambda_1(A_n) + \varepsilon.$$

1.1 La simmetrizzazione**Definizione 1.10 - Simmetrizzazione**

Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un boreliano di misura finita. Definiamo A^* il *riarrangiamento simmetrico decrescente* di A , come la palla aperta di centro l'origine la cui misura è uguale a quella di A . Quindi

$$A^* := \{x : |x| < r\} \text{ con } r \text{ tale che } \mathcal{L}^d(A) = \mathcal{L}^d(B_r).$$

Osservazione 1.5

In questo elaborato scegliamo di considerare delle palle aperte perchè così la funzione caratteristica associata ad A^* , χ_{A^*} risulta essere semicontinua inferiormente.

Definizione 1.11 - Funzione di distribuzione

Data f misurabile e $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ definiamo la *funzione di distribuzione* associata a f come

$$d_f(\alpha) = \mathcal{L}^d\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > \alpha\}.$$

Proposizione 1.12 - Rappresentazione a strati

Per ogni $p \in (0, +\infty)$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ si ha che

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha.$$

Grazie alla Proposizione 1.12 possiamo definire, a partire dal riarrangiamento di insiemi, il riarrangiamento di funzioni misurabili.

Definizione 1.13

Data $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$ misurabile che svanisce all'infinito definiamo f^* il *riarrangiamento* di f come segue:

$$f^*(x) = \int_0^\infty \chi_{\{|f|>t\}}(x) dt.$$

Osservazione 1.6

Abbiamo una serie di proprietà utili, la cui dimostrazione si può trovare in [9]:

- $f^*(x)$ è non-negativa, simmetrica e non-crescente.
- $f^*(x)$ è semicontinua inferiormente. In particolare $f^*(x)$ è misurabile.
- Gli insiemi di livello di f^* sono il riarrangiamento degli insiemi di livello di $|f|$, ossia

$$\{x : f^*(x) > t\} = \{x : |f(x)| > t\}^*.$$

In particolare, grazie alla Proposizione 1.12, se $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ si ha $\|f\|_p = \|f^*\|_p$.

- Il riarrangiamento preserva l'ordine, ossia se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ allora $f^*(x) \leq g^*(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$.

Lemma 1.14

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ di misura finita, $f_n \in L^p(\Omega)$ tali che $f_n \geq 0$ e $f_n \rightarrow f$ in $L^p(\Omega)$. Allora per quasi ogni $t \in [0, +\infty)$ vale che

$$|\{f_n > t\}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\{f > t\}|.$$

Dimostrazione. Osserviamo subito che, visto che $f_n \rightarrow f$ in $L^p(\Omega)$, a meno di sottosuccessione, abbiamo anche che $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per quasi ogni x . Fissato $t \in [0, +\infty)$ possiamo scrivere

$$\{f > t\} \sqcup \{f < t\} \sqcup \{f = t\} = \Omega = \{f_n > t\} \sqcup \{f_n < t\} \sqcup \{f_n = t\}.$$

Se $f_n(x) \rightarrow f(x)$ allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \chi_{\{f_n < t\}}(x) \geq \chi_{\{f < t\}}(x)$$

infatti se $x \notin \{f < t\}$ è ovvio, mentre se $x \in \{f < t\}$ si ha che $f_n(x) < t$ definitivamente. Per il lemma di Fatou segue

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |\{f_n > t\}| \geq |\{f > t\}|.$$

Similmente vale anche

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |\{f_n < t\}| \geq |\{f < t\}|.$$

Visto che $f, f_n \in L^p(\Omega)$ sappiamo che $|\{f = t\}| = 0$ e $|\{f_n = t\}| = 0$ per quasi ogni t . Abbiamo quindi che

$$|\Omega| \geq \liminf_n (|\{f_n < t\}| + |\{f_n > t\}|) \geq |\{f < t\}| + |\{f > t\}| = |\Omega|.$$

La tesi segue ricordando il seguente fatto per successioni numeriche: date due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ tali che $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \geq a$ e $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \geq b$ per certi $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali $a_n + b_n = a + b = 1$ per ogni n allora vale che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{e} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

□

Osservazione 1.7 - Formula di Co-Area

È possibile trovare un'altra formula sullo stile della formula di rappresentazione a strati che coinvolge il gradiente di una funzione di Sobolev. Questa è la formula di *co-area*: se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ per ogni funzione misurabile g e per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^d$ misurabile possiamo scrivere

$$\int_E g(x) |\nabla f(x)| dx = \int_0^\infty \int_{E \cap f^{-1}(t)} g(x) \mathcal{H}^{d-1}(x) dt.$$

Conseguenza utile è che

$$\|\nabla f\|_1 = \int_0^\infty \mathcal{H}^{d-1}(\{f > t\}) dt.$$

Osservazione 1.8

In realtà la formula di co-area è vera in generale per le funzioni BV . La seguente dimostrazione, nella quale useremo la formula, potrebbe essere effettuata mostrando che se $f \in W^{1,p}(\Omega)$ allora $f \in BV(\Omega)$, ma questo approccio più teorico richiederebbe strumenti più avanzati del necessario. Seguiremo invece un approccio più diretto, dimostrando la tesi con un argomento di approssimazione.

Proposizione 1.15 - Disuguaglianza di Pólya-Szegő

Data $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ con $p \in [1, +\infty]$, allora

$$\|\nabla f\|_p \geq \|\nabla f^*\|_p.$$

Dimostrazione. Dimostriamo preliminarmente il risultato supponendo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dalla formula di co-area possiamo scrivere:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|^p dx = \int_0^\infty \int_{f^{-1}(t)} |\nabla f|^{p-1} d\mathcal{H}^{d-1} dt.$$

Usando la disuguaglianza di Hölder abbiamo

$$\mathcal{H}^{d-1}(f^{-1}(\{t\})) \leq \left(\int_{f^{-1}(\{t\})} |\nabla f|^{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{f^{-1}(\{t\})} \frac{1}{|\nabla f|} \right)^{1-\frac{1}{p}}$$

e quindi

$$\int_{f^{-1}(\{t\})} |\nabla f|^{p-1} \geq \frac{\mathcal{H}^{d-1}(f^{-1}(\{t\}))^p}{\left(\int_{f^{-1}(\{t\})} \frac{1}{|\nabla f|} \right)^{p-1}}.$$

Replicando quanto appena fatto per f^* si ha

$$\int_{f^{-1}(\{t\})} \frac{1}{|\nabla f|^{p-1}} = \int_{f^{*-1}(\{t\})} \frac{1}{|\nabla f^*|^{p-1}}$$

e

$$\int_{f^{-1}(\{t\})} |\nabla f^*|^{p-1} = \frac{\mathcal{H}^{d-1}(f^{*-1}(\{t\}))^p}{\left(\int_{f^{*-1}(\{t\})} \frac{1}{|\nabla f^*|} \right)^{p-1}}.$$

Usando la *disuguaglianza isoperimetrica*, per la quale sappiamo

$$\mathcal{H}^{d-1}(f^{*-1}(\{t\})) \leq \mathcal{H}^{d-1}(f^{-1}(\{t\})).$$

possiamo concludere che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^p dx &= \int_0^\infty \int_{f^{-1}(t)} |\nabla f|^{p-1} d\mathcal{H}^{d-1} dt \geq \int_0^\infty \frac{\mathcal{H}^{d-1}(f^{-1}(\{t\}))^p}{\left(\int_{f^{-1}(\{t\})} \frac{1}{|\nabla f|} \right)} \\ &\geq \int_0^{+\infty} \frac{\mathcal{H}^{d-1}(f^{*-1}(\{t\}))^p}{\left(\int_{f^{-1}(\{t\})} \frac{1}{|\nabla f|} \right)^{p-1}} = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f^*|^p. \end{aligned}$$

Vediamo ora come togliere l'ipotesi di regolarità sulla f . Da risultati noti sappiamo che $C_C^\infty(\mathbb{R}^d) = W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, esiste quindi $\{\varphi_n\} \subseteq C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che $\varphi_n \rightarrow f$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Visto che la successione φ_n può essere scelta come convoluzione di f con dei mollificatori possiamo assumere che φ_n e $\nabla\varphi_n$ siano limitati e tali per cui $\begin{cases} \varphi_n \xrightarrow{L^p} f \\ \nabla\varphi_n \xrightarrow{L^p} \nabla f \end{cases}$. Una volta visto che $\varphi_n^* \rightarrow f^*$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$, la tesi segue per semicontinuità della norma, infatti

$$\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\nabla\varphi_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\nabla\varphi_n^*\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|\nabla f^*\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Dimostriamo quindi che $\varphi_n^* \rightarrow f^*$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Supponiamo preliminarmente che $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ e che $\text{spt} f$ sia limitato. In questo caso, per il Lemma 1.14, abbiamo che i livelli convergono quasi ovunque, ossia

$$\varphi_n^*(x) = \int_0^\infty \chi_{\{|\varphi_n| > t\}}^*(x) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \chi_{\{|f| > t\}}^*(x) dt = f^*(x)$$

e per il teorema di convergenza dominata abbiamo che $\varphi_n^* \rightarrow f^*$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Vediamo che è possibile rimuovere l'ipotesi $\text{spt} f$ limitato, dividendo la trattazione in due casi:

- $\mathcal{L}^d(\text{spt} f) < +\infty$: consideriamo l'approssimazione $f_n = f\psi_n$ dove consideriamo $\psi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in B_n \\ 0 & x \in \mathbb{R}^d \setminus B_{2n} \end{cases}$. Chiaramente $\text{spt} f_n$ è limitato e, visto che $|\text{spt} f| < +\infty$, si può concludere per il Lemma 1.14.
- $\mathcal{L}^d(\text{spt} f) = +\infty$: in questo caso l'approssimazione da considerare è un'altra: per ogni $\varepsilon > 0$ sia $f_\varepsilon = (f - \varepsilon)_+$. Osserviamo che, visto che $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, necessariamente $|\text{spt} f_\varepsilon| < +\infty$ e per il caso precedente abbiamo $f_\varepsilon^* \rightarrow f^*$. Si conclude dal momento che $(f - \varepsilon)_+^* = (f^* - \varepsilon)_+$.

In conclusione, si può rimuovere l'ipotesi di $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$: in questo caso è sufficiente troncare per livelli, ossia considerare $f_n(x) = (-n) \vee (f(x) \wedge n)$. Chiaramente $f_n \rightarrow f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ e per definizione $(f \wedge n)^* = f^* \wedge n$. □

Corollario 1.16

Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ allora $u^* \in W^{1,p}(\Omega^*)$.

Siamo finalmente pronti ad affrontare un primo problema di forma che fu congetturato da Lord Rayleigh e risolto indipendentemente da G. Faber in [6] e E. Krahn. in [8].

Teorema 1.17 - Rayleigh-Faber-Krahn

Dato $c \in \mathbb{R}^{>0}$ consideriamo $\mathcal{C} = \{\Omega \subset \mathbb{R}^d : |\Omega| = c\}$, il funzionale

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \Omega &\longmapsto \lambda_1(\Omega) \end{aligned}$$

ha minimo per $\Omega = B_R$ con $R = \left(\frac{c}{\omega_d}\right)^{\frac{1}{d}}$ dove $\omega_d = |B_1|$.

Dimostrazione. Per la caratterizzazione variazionale degli autovalori possiamo scrivere

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} v^2 dx}.$$

Ricordando la definizione di riarrangiamento vogliamo vedere che $\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*)$, la tesi seguirà perchè $B_R^* = B_R$. Infatti, usando la Proposizione (1.15) e la minimalità di λ_1 , segue che

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 dx}{\int_{\Omega} u_1^2 dx} \geq \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u_1^*|^2 dx}{\int_{\Omega^*} (u_1^*)^2 dx} \geq \lambda_1(\Omega^*).$$

□

Osservazione 1.9

Segue quindi che se $|\Omega| = |B_r| = \varepsilon$ allora $\lambda_1(\Omega) \geq \frac{c_d}{|\Omega|^{\frac{d}{2}}}$ infatti

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(B_r) = \frac{1}{r^2} \lambda_1(B_1) = \frac{c_d}{\varepsilon^{\frac{d}{2}}}$$

1.2 Una generalizzazione degli spazi di Sobolev

Nella sezione precedente abbiamo dato la definizione di spazio di Sobolev a partire da un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ che è aperto. Tuttavia, nella pratica della risoluzione di problemi ellittici, è comune lavorare su insiemi che a priori non sono aperti, ma solamente misurabili. A tal fine estendiamo ora la nozione di spazio di Sobolev ad ogni insieme misurabile $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ introducendo lo spazio di tipo Sobolev $\tilde{H}_0^1(\Omega)$.

Definizione 1.18

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ consideriamo lo spazio $\tilde{H}_0^1(\Omega)$ che definiamo come segue:

$$\tilde{H}_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^d) : u = 0 \text{ per quasi ogni } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega\}.$$

Osservazione 1.10

In generale vale che $\tilde{H}_0^1(\Omega) \supseteq H_0^1(\Omega)$. Scopo di questa sezione è capire delle condizioni per cui $H_0^1(\Omega) = \tilde{H}_0^1(\Omega)$, vedremo che per Ω con una stima di densità esterna, allora varrà l'uguaglianza. Per fare questo è necessario ricordare innanzitutto alcune proprietà utili. Sfrutteremo inoltre dei risultati di regolarità classici di cui riporteremo solo l'enunciato.

Definizione 1.19 - Stima di densità esterna

Diciamo che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ha la *stima di densità esterna* se vale la seguente proprietà: esistono due costanti $r_0 > 0$ e $c \in (0, 1)$ tali che per ogni $x \in \partial\Omega$ e per ogni $r \in (0, r_0)$ si ha la stima:

$$|B_r(x) \cap \Omega| \leq (1 - c)|B_r|.$$

Osservazione 1.11

$\tilde{H}_0^1(\Omega)$ è un sottospazio lineare chiuso di $H^1(\mathbb{R}^d)$. Segue quindi che \tilde{H}_0^1 è anche un chiuso debole di $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. Sia $u_n \rightarrow u$ fortemente in $H^1(\mathbb{R}^d)$ con $u_n \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$. Allora sappiamo che la convergenza è forte in L^2 e dunque, a meno di sottosuccessioni, vale che $u_n(x) \rightarrow u(x)$ per quasi ogni x . □

Inoltre, valgono le seguenti proposizioni:

Proposizione 1.20

Date due funzioni $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$, sono equivalenti:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} \varphi f \, dx \quad \text{per ogni } \varphi \in \tilde{H}_0^1(\Omega); \quad (1.1)$$

e

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} u f \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx - \int_{\Omega} v f \, dx \quad \text{per ogni } v \in \tilde{H}_0^1(\Omega). \quad (1.2)$$

Proposizione 1.21

Siano Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^d ed $f \in L^2(\Omega)$. Allora, esiste un'unica funzione $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$ tale per cui valgono (1.1) e (1.2). Diremo che u è soluzione debole del problema $-\Delta u = f$ nello spazio $\tilde{H}_0^1(\Omega)$.

Quindi tutti i risultati visti in precedenza sono validi anche per soluzioni deboli $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$.

Proposizione 1.22

Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^d , $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p \geq \frac{d}{2}$ ed $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione debole di

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega.$$

Allora, la funzione u è definita puntualmente ovunque in Ω come

$$u(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) \, dx \quad \text{per ogni } x_0 \in \Omega.$$

Inoltre, esiste una costante dimensionale C_d tale che

$$\left| \int_{B_r(x_0)} u \, dx - u(x_0) \right| \leq \frac{p C_d}{2p - d} \|f\|_{L^p(\Omega)} r^{2 - \frac{d}{p}},$$

per ogni $x_0 \in \Omega$ ed ogni $r > 0$ tale che $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$.

Teorema 1.23 - Regolarità Hölder interna

Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^d e sia $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ una soluzione debole di

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$$

dove $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > \frac{d}{2}$. Allora, esiste una costante dimensionale C_d tale che

$$|u(x) - u(y)| \leq C_d \left(\operatorname{osc}_{\Omega} u + \frac{p \|f\|_{L^p(B_1)}}{2p - d} \right) |x - y|^\alpha$$

per ogni $x, y \in \Omega_\delta := \left\{ x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \delta \right\}$ tali che $|x - y| \leq \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{3p-d}{p}}$, dove $\alpha := \frac{2p-d}{3p-d}$.

Teorema 1.24 - Regolarità Hölder fino al bordo

Sia Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^d che ha la stima di densità esterna. Siano $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p \geq \frac{d}{2}$ ed $u \in H_0^1(\Omega)$ la soluzione debole di

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Allora, esistono $\alpha \in (0, 1)$, $C > 0$ e $\delta > 0$ che dipendono solo da p , d , c_0 ed r_0 , tali che

$$|u(x) - u(y)| \leq C \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)} \right) |x - y|^\alpha \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^d \text{ tali che } |x - y| \leq \delta.$$

Lemma 1.25

Siano Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^d ed u una funzione tale che

$$u \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d) \quad \text{e} \quad u \equiv 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \setminus \Omega.$$

Allora $u \in H_0^1(\Omega)$.

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che è sufficiente dimostrare il lemma nel caso $u \geq 0$, in quanto sia u_+ che u_- sono tali che

$$u_\pm \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d) \quad \text{e} \quad u_\pm \equiv 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \setminus \Omega.$$

Dato un $t > 0$, consideriamo la funzione $u_t := (u - t)_+$ tale che, detto K_t il compatto $K_t := \{u \geq t\}$, valga $K_t \subseteq \Omega$ e

$$u_t \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d) \quad \text{e} \quad u_t \equiv 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \setminus K_t.$$

Di conseguenza, la distanza

$$\delta := \text{dist}(K_t; \mathbb{R}^d \setminus \Omega) = \min \left\{ |x - y| : x \in K_t, y \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega_t \right\}$$

è strettamente positiva. Consideriamo ora $\phi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ con $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$\phi \equiv 0 \text{ su } \mathbb{R}^d \setminus B_1; \quad \phi \geq 0 \text{ su } \mathbb{R}^d; \quad \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dx = 1.$$

Segue che

$$\phi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d); \quad \phi_\varepsilon \equiv 0 \text{ su } \mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon; \quad \phi_\varepsilon \geq 0 \text{ su } \mathbb{R}^d; \quad \int_{\mathbb{R}^d} \phi_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Abbiamo inoltre che

- $u_t * \phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$;
- per $\varepsilon \rightarrow 0$, $u_t * \phi_\varepsilon$ converge a u_t fortemente in $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Ora, osserviamo che per $\varepsilon < \delta$ il supporto di $u_t * \phi_\varepsilon$ è contenuto in Ω , ovvero $u_t * \phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$. Si ha quindi che per definizione $u_t \in H_0^1(\Omega)$. Infine, per concludere basta osservare che per $t \rightarrow 0$, la funzione u_t converge a u fortemente in $H^1(\mathbb{R}^d)$. \square

Proposizione 1.26

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto limitato che soddisfa la stima di densità esterna. Sia $f \in L^p(\Omega)$, per un qualche $p \geq \frac{d}{2}$. Sia $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$ la soluzione debole del problema $-\Delta u = f$ in $\tilde{H}_0^1(\Omega)$. Allora,

- (i) $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ per un qualche $\alpha > 0$;
- (ii) $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$;
- (iii) $u \in H_0^1(\Omega)$.

Dimostrazione. I primi due punti seguono per il Teorema 1.24. Il punto (iii) segue da (i) e (ii) ed il Lemma 1.25. \square

Teorema 1.27

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^d che soddisfa la stima di densità esterna, allora

$$\tilde{H}_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega).$$

Dimostrazione. Osserviamo che basta dimostrare il teorema per domini limitati. Infatti, supponiamo che Ω sia un aperto illimitato ed u una funzione tale che

$$u \in H^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{e} \quad u = 0 \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^d \setminus \Omega.$$

Consideriamo una funzione $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d); \quad \varphi \equiv 0 \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^d \setminus B_2; \quad \varphi \equiv 1 \quad \text{su} \quad B_1; \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \quad \text{su} \quad B_2 \setminus B_1.$$

Per ogni $R > 0$, definiamo la funzione $u_R : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$u_R(x) := u(x)\varphi\left(\frac{x}{R}\right) \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

È immediato verificare che, per $R \rightarrow +\infty$,

$$u_R \rightarrow u \quad \text{fortemente in} \quad H^1(\mathbb{R}^d).$$

Ora, siccome $u_R \in \tilde{H}_0^1(\Omega \cap B_R)$ e $\Omega \cap B_R$ soddisfa ancora la stima di densità esterna, abbiamo che

$$u_R \in H_0^1(\Omega \cap B_R),$$

e quindi $u_R \in H_0^1(\Omega)$. Passando al limite per $R \rightarrow +\infty$, otteniamo che $u \in H_0^1(\Omega)$.

Consideriamo quindi Ω limitato e sia $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$. Dimostreremo che $u \in H_0^1(\Omega)$. Siccome $u_\pm \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$, basta considerare il caso $u \geq 0$ su \mathbb{R}^d . È inoltre possibile supporre che $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, infatti data una qualsiasi funzione non-negativa $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$. Per ogni $M > 0$ consideriamo la funzione $u \wedge M$. È immediato verificare che $u \wedge M \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$. Di conseguenza, per quello che abbiamo appena dimostrato, $u \wedge M \in H_0^1(\Omega)$. D'altra parte, per $M \rightarrow +\infty$, $u \wedge M$ converge forte in $H^1(\mathbb{R}^d)$ a u . Quindi anche $u \in H_0^1(\Omega)$.

Sia ora quindi $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ con $M := \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$. Per ogni $n \geq 1$, consideriamo il funzionale

$$J_n : \tilde{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad J_n(v) := \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + n \int_{\Omega} |u - v|^2 dx.$$

Osserviamo che per ogni $n \geq 1$ esiste un'unica funzione $u_n \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$ tale che

$$J_n(u_n) \leq J_n(v) \quad \text{per ogni} \quad v \in \tilde{H}_0^1(\Omega).$$

Siccome

$$J(u_n \vee 0) \leq J(u_n) \quad \text{e} \quad J(u_n \wedge M) \leq J(u_n),$$

abbiamo che necessariamente

$$0 \leq u_n \leq M \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^d.$$

Siccome per ogni $\varphi \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$ si ha che il minimo della funzione

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto J_n(u_n + t\varphi),$$

è raggiunto in $t = 0$, abbiamo che

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx = n \int_{\Omega} \varphi (u - u_n) \, dx,$$

ovvero u_n è soluzione debole in $\tilde{H}_0^1(\Omega)$ del problema

$$-\Delta u_n = n(u - u_n).$$

Siccome $n(u - u_n)$ è una funzione limitata, usando la Proposizione (1.26), abbiamo che $u_n \in H_0^1(\Omega)$.

Osserviamo che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$J_n(u_n) \leq J_n(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + n \int_{\Omega} |u - u_n|^2 \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx.$$

In particolare,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} |u_n - u|^2 \, dx \leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx. \quad (1.3)$$

La seconda disuguaglianza implica che

$$u_n \rightarrow u \quad \text{forte in} \quad L^2(\Omega).$$

Ora, questa informazione, insieme alla prima disuguaglianza implica che le norme H^1 di u_n sono limitate e quindi

$$u_n \rightarrow u \quad \text{debole in} \quad H^1(\mathbb{R}^d).$$

Per la semicontinuità delle norme H^1 , abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 \, dx.$$

Usando di nuovo la prima disuguaglianza di (1.3), otteniamo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 \, dx.$$

Di conseguenza, $u_n \rightarrow u$ forte in $H^1(\mathbb{R}^d)$. In particolare, siccome $u_n \in H_0^1(\Omega)$, questo implica che

$$u \in H_0^1(\Omega).$$

□

Esistenza

L'obiettivo della tesi è quello di mostrare l'esistenza di una soluzione per il seguente problema:

$$\min \left\{ \lambda_1(\Omega) + \int_{\Omega} Q(x)dx, \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \text{ aperto} \right\}$$

dove $Q : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile con alcune ipotesi che saranno specificate in seguito. In questo capitolo studiamo il problema ausiliario

$$\min \left\{ \tilde{\lambda}_1(\Omega) + \int_{\Omega} Q(x)dx, \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \right\} \tag{1}$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ misurabile, dove

$$\tilde{\lambda}_1(\Omega) = \inf_{u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 : \int_{\Omega} u^2 = 1 \right\}$$

Vedremo in seguito come riottenere una soluzione per il problema originale.

Osserviamo immediatamente che per lo studio dell'esistenza di un minimo per il problema (1) il metodo diretto del calcolo delle variazioni non è sufficiente visto che cerchiamo $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. A tale scopo introduciamo quindi uno strumento molto utile in generale che è il *principio di concentrazione-compattezza* introdotto da L. Lions in [11].

2.1 Il principio di concentrazione-compattezza

Definizione 2.1 - Funzione di concentrazione di una misura

Per ogni misura di Borel μ su \mathbb{R}^d definiamo la *funzione di concentrazione* Q_{μ} come segue:

$$Q_{\mu} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \\ r \mapsto \sup_{x \in X} \mu(B_r(x)) \cdot$$

Osservazione 2.1

Dalla definizione segue che Q_{μ} è: non decrescente, non negativa e tale per cui

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} Q_{\mu}(r) = \|Q_{\mu}\|_{L^{\infty}} = \mu(\mathbb{R}^d).$$

Lemma 2.2

Per ogni successione di funzioni non decrescenti $Q_n : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ esiste una sottosuccessione convergente puntualmente ad una funzione $Q : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ non decrescente.

Dimostrazione. Il limite puntuale esiste visto che $\{Q_n(x)\}_n$ è limitata e decrescente per ogni x . È quindi sufficiente considerare $Q(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x)$. \square

Teorema 2.3 - Principio di Concentrazione-Compattezza

Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $L^1(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$f_n \geq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^d} f_n dx = \lambda$$

dove $\lambda > 0$ fissato. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_k$ tale che si verifichi una e una sola delle seguenti:

1. *Compattezza a meno di traslazione:* Esiste $y_k \in \mathbb{R}^d$ tale che $\tau_{-y_k} f_{n_k}$ è tight, ossia per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\int_{y_k + B_R} f_{n_k}(x) dx \geq \lambda - \varepsilon.$$

2. *Vanishing:* Per ogni $R \in \mathbb{R}^+$ si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{y + B_R} f_{n_k}(x) dx = 0.$$

3. *Splitting:* Esiste $\alpha \in]0, \lambda[$ tale che, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $f_k^1, f_k^2 \in L^1_+(\mathbb{R}^d)$ e $k_0 \geq 1$ tale per cui per ogni $k \geq k_0$

$$\begin{cases} \|f_{n_k} - (f_k^1 + f_k^2)\|_{L^1} \leq \varepsilon \\ \left| \int_{\mathbb{R}^d} f_k^1 dx - \alpha \right| \leq \varepsilon \\ \left| \int_{\mathbb{R}^d} f_k^2 dx - (\lambda - \alpha) \right| \leq \varepsilon \\ \text{dist}(\text{supp } f_k^1, \text{supp } f_k^2) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty. \end{cases}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione di concentrazione relativa alla misura $\mu = \rho_n(x)dx$:

$$Q_n(t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{y + B_t} \rho_n(\xi) d\xi.$$

Oltre a essere non decrescenti e non negative, le Q_n sono uniformemente limitate. Sia $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q_n(t) = \lambda$. Per il lemma si ha che esistono una sottosuccessione Q_{n_k} e una funzione $Q : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ tali che $Q_{n_k}(t) \rightarrow Q(t)$ per ogni $t \geq 0$. Chiamiamo

$$\alpha := \lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) \in [0, \lambda].$$

I diversi valori di α daranno i diversi possibili comportamenti:

1. $\alpha = 0$ allora abbiamo vanishing: chiaro per definizione di $Q(t)$.

2. $\alpha = \lambda$ allora abbiamo compattezza: sia $\mu > \frac{\lambda}{2}$ e $R^{(\mu)}$ tale che per ogni $k \geq 1$ si ha

$$Q_{n_k}(R^{(\mu)}) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{y+B_{R^{(\mu)}}} \rho_{n_k}(\xi) d\xi > \mu.$$

Quindi esiste $y_k^{(\mu)}$ tale che

$$\int_{y_k^{(\mu)}+B_{R^{(\mu)}}} \rho_{n_k}(\xi) d\xi > \mu.$$

Confrontando ora con il $\mu = \frac{\lambda}{2}$ e $\bar{y}_k = y_k^{(\frac{\lambda}{2})}$ si deve avere

$$|y_k^{(\mu)} - y_k| \leq R^{(\frac{\lambda}{2})} + 2R^{(\mu)} \quad \text{per ogni } \mu \geq \frac{\lambda}{2}.$$

Vale quindi che, se $R^{(\mu)} := R^{(\frac{\lambda}{2})} + 2R^{(\mu)}$, esiste una successione $y_k \in \mathbb{R}^n$ tale che per ogni $k \geq 1$, $\mu \geq \frac{\lambda}{2}$ si ha

$$\int_{y_k+B_{R^{(\mu)}}} \rho_{n_k}(\xi) d\xi > \mu.$$

3. $\alpha \in (0, \lambda)$ abbiamo dicotomia: dato $\varepsilon > 0$ sia R tale che $Q(R) > \alpha - \varepsilon$. Per un k abbastanza grande sappiamo che $\alpha - \varepsilon < Q_{n_k}(R) < \alpha + \varepsilon$. Si può allora considerare $\{R_k\}_k$ tale che $R_k \rightarrow +\infty$ e $Q_{n_k}(R_k) \leq \alpha + \varepsilon$. Sappiamo inoltre che esiste $y_k \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\int_{y_k+B_R} \rho_{n_k}(\xi) d\xi \in]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[.$$

Ponendo ora

$$\begin{aligned} \rho_k^1 &= \rho_{n_k} \mathbb{1}_{y_k+B_R} \\ \rho_k^2 &= \rho_{n_k} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus \{y_k+B_{R_k}\}} \end{aligned}$$

abbiamo la tesi, infatti:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_{n_k} - \rho_k^1 - \rho_k^2 &= \int_{R \leq |x-y_k| \leq R_k} \rho_{n_k}(x) dx \\ &\leq Q_{n_k}(R_k) - Q_{n_k}(R) + 2\varepsilon \\ &\leq (\alpha + \varepsilon) - (\alpha - \varepsilon) + 2\varepsilon = 4\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Osservazione 2.2

Se le funzioni con cui stiamo lavorando hanno della regolarità, allora nella dimostrazione precedente possiamo sostituire le funzioni caratteristiche con delle *funzioni cutoff*.

Ricordiamo inoltre ora un altro strumento introdotto sempre da L.Lions in [12] che permette di escludere senza troppa fatica il caso *vanishing*.

Lemma 2.4

Sia $1 < p \leq +\infty$ e $1 \leq q < +\infty$ con $q \neq \frac{dp}{d-p}$ quando $p < d$. Se $\{u_n\}$ è limitata in $L^q(\mathbb{R}^d)$, $\{\nabla u_n\}$ è limitata in $L^p(\mathbb{R}^d)$ e si ha che

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{y+B_R} |u_n|^q dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{per un qualche } R > 0$$

allora $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ in $L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ per $\alpha \in \left[q, \frac{pd}{d-p} \right]$.

Dimostrazione. Osserviamo che è sufficiente dimostrare la tesi nel caso $\{u_n\} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Infatti se $\{u_n\}$ successione limitata in $L^q(\mathbb{R}^d)$ allora per ogni $M > 0$ si ha che $v_n := u_n \wedge M$ rispecchia tutte le ipotesi del lemma e, in particolare, $v_n \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Assumendo di avere la tesi per le successioni in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, segue che per $\alpha \in \left[q, \frac{pd}{d-p} \right]$ si ha

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ in } L^\alpha(\mathbb{R}^d).$$

Sia ora $\beta \in \left[q, \frac{pd}{d-p} \right]$ tale che $\beta > \alpha$, allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |u_n|^\alpha dx &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |v_n|^\alpha + \int_{\mathbb{R}^d} |u_n|^\alpha \mathbf{1}_{\{|u_n| \geq C\}} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |v_n|^\alpha dx + \frac{1}{C^{\beta-\alpha}} \int_{\mathbb{R}^d} |u_n|^\beta dx \end{aligned}$$

e quindi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |u_n|^\alpha dx \leq \frac{K}{C^{\beta-\alpha}} \quad \text{per ogni } C > 0.$$

Abbiamo la tesi considerando $C \rightarrow +\infty$.

Dimostriamo quindi il lemma nel caso in cui $\{u_n\} \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^d)$ limitata. Per ogni $\beta > \min\left(q, \frac{dp}{d-p}\right)$ vale che

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{y+B_R} |u_n|^\beta dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Consideriamo \bar{q} tale che $q < \bar{q}$ e $q < (\bar{q} - 1)p' < +\infty$ dove p' è l'esponente coniugato a p . Allora usando la disuguaglianza di Hölder segue che

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{y+B_R} |u_n|^{\bar{q}-1} |\nabla u_n| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Usando i teoremi di immersione di Sobolev segue che, dato $\gamma \in \left] 1, \frac{d}{d-1} \right]$, esiste una costante c_0 indipendente da y tale che

$$\begin{aligned} \int_{y+B_R} |u_n|^{\bar{q}\gamma} dx &\leq \left(\int_{y+B_\rho} |u_n|^{\bar{q}} + \bar{q} |u_n|^{\bar{q}-1} |\nabla u_n| dx \right)^\gamma \\ &\leq \varepsilon_n^{\gamma-1} \int_{y+B_\rho} |u_n|^{\bar{q}} + \bar{q} |u_n|^{\bar{q}-1} |\nabla u_n| dx \end{aligned}$$

con $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Allora ricoprendo \mathbb{R}^d con palle di raggio R in modo che ogni punto sia contenuto in al più m palle, con m intero fissato, otteniamo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_n|^{\bar{q}\gamma} dx \leq m \varepsilon_n^{\gamma-1} \int_{\mathbb{R}^d} |u_n|^{\bar{q}} + \bar{q} |u_n|^{\bar{q}-1} |\nabla u_n| dx \leq c \varepsilon_n^{\gamma-1}$$

da cui segue la tesi. □

2.2 Il teorema di esistenza

Siamo quindi pronti a enunciare e dimostrare il seguente teorema di esistenza di un minimo per il problema (1).

Teorema 2.5

Sia $Q : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che :

- $Q \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$
- Esista $c \in \mathbb{R}^{>0}$ per cui $c \leq Q(x)$ per quasi ogni x
- Per ogni R si ha che $\sup_{x \in B_R} Q(x) < Q_\infty$ dove

$$Q_\infty := \lim_{R \rightarrow \infty} \inf_{x \in \mathbb{R}^d \setminus B_R} Q(x)$$

Allora esiste un insieme misurabile Ω che minimizza

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \tilde{\lambda}_1(A) + \int_A Q \end{aligned}$$

dove \mathcal{A} è la classe degli insiemi $A \subseteq \mathbb{R}^d$ di misura finita assegnata.

Osservazione 2.3

Prima di dimostrare il teorema di esistenza per il nostro problema osserviamo che questo è equivalente ad un altro problema di minimo. Consideriamo il funzionale \mathcal{J} , che in seguito chiameremo *energia*, definito come segue:

$$\mathcal{J}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + \int_{\{u>0\}} Q(x) dx.$$

Vediamo che preso $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tale che $\int_{\mathbb{R}^d} u^2 = 1$ è minimo per \mathcal{J} , allora $\Omega := \{u > 0\}$ è minimo per \mathcal{F} . Vale inoltre che, se Ω è minimo per \mathcal{F} allora esiste $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tale che, a meno di rinormalizzazione, realizza il minimo per \mathcal{J} . Dimostriamo ora le due implicazioni:

Minimo per $\mathcal{F} \Rightarrow$ minimo per \mathcal{J} : sia Ω minimo per \mathcal{F} . Vogliamo dimostrare che $\forall v \in H^1(\mathbb{R}^d), v \geq 0$ si ha $\mathcal{J}(u) \leq \mathcal{J}(v)$, dove u è la funzione tale che

$$\tilde{\lambda}_1(\Omega) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} = \min_{v \in H^1(\mathbb{R}^d)} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2}{\int_\Omega v^2}.$$

Per costruzione, visto che $u \geq 0$, vale che $\{u > 0\} \subseteq \Omega$ e dunque $\mathcal{F}(\{u > 0\}) \leq \mathcal{F}(\Omega)$.

Data una qualsiasi $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$, detto $\Omega_v := \{v > 0\}$, si ha che:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(v) &= \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} v^2 dx} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega_v} Q(x) dx \\ &\geq \tilde{\lambda}_1(\Omega_v) + \int_{\Omega_v} Q(x) dx \\ &= \mathcal{F}(\Omega_v) \geq \mathcal{F}(\Omega). \end{aligned}$$

In particolare, per come è stata scelta u e visto che $Q \geq 0$, vale che:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(u) &= \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} u^2 dx} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega_u} Q(x) dx \\ &= \tilde{\lambda}_1(\Omega) + \int_{\Omega_u} Q(x) dx \\ &\leq \tilde{\lambda}_1(\Omega) + \int_{\Omega} Q(x) dx = \mathcal{F}(\Omega).\end{aligned}$$

La funzione u dunque è tale per cui vale $\mathcal{F}(\Omega) = \mathcal{J}(u)$ e inoltre $\mathcal{J}(u) \leq \mathcal{J}(v)$.

Minimo per $\mathcal{J} \Rightarrow$ minimo per \mathcal{F} : sia u minimo per \mathcal{J} . Vogliamo vedere che $\forall A \in \mathcal{A}$ si ha $\mathcal{F}(\{u > 0\}) \leq \mathcal{F}(A)$. Sia $A \in \mathcal{A}$ e consideriamo $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$\tilde{\lambda}_1(A) = \frac{\int_A |\nabla v|^2}{\int_A v^2} = \min_{w \in H^1(\mathbb{R}^d)} \frac{\int_A |\nabla w|^2}{\int_A w^2}.$$

Come osservato sopra, vale che $\{v > 0\} \subseteq A$ e quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(A) &= \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} v^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v|^2 + \int_A Q(x) dx \\ &\geq \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} v^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v|^2 + \int_{\{v \geq 0\}} Q(x) dx \\ &= \mathcal{J}(v) \geq \mathcal{J}(u) = \mathcal{F}(\{u > 0\}).\end{aligned}$$

Questo dimostra che $\{u > 0\}$ è minimo per \mathcal{F} .

Dimostrazione. Per l'osservazione appena fatta è sufficiente considerare il problema preliminare, indipendente da Ω ,

$$\min_{u \in H^1(\mathbb{R}^d)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + \int_{\{u > 0\}} Q(x) dx, \int_{\mathbb{R}^d} u^2 = 1 \right\}$$

e dimostrare l'esistenza di un minimo $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

Consideriamo una successione minimizzante u_n per $\mathcal{J}(u)$ tale che $\|u_n\|_{L^2} = 1$ e $\{\nabla u_n\}$ limitati in $L^2(\mathbb{R}^d)$, quindi $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}$ è limitata.

La successione minimizzante può essere scelta in modo che:

- Detti $\Omega_n := \{u_n > 0\}$ si ha che esistono $m, M \in \mathbb{R}^{>0}$ tale che $|\Omega_n| \leq M$ e $\tilde{\lambda}_1(\Omega) \leq m$ per ogni n . Infatti, essendo minimizzante vale che $\forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{J}(\varphi) = \min_{\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)} \mathcal{J}(\psi) \text{ oppure } \mathcal{J}(u_n) \leq \mathcal{J}(\varphi)$$

definitivamente.

- Le u_n come autofunzioni per $-\Delta$ su Ω_n . Infatti se φ_n sono le autofunzioni su Ω_n vale che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\varphi_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(u_n)$$

e quindi potremmo considerare $\{\varphi_n\}$ in luogo di $\{u_n\}$. In particolare, grazie all'Osservazione 1.9, vale che

$$C_d |\Omega_n|^{-\frac{2}{d}} \leq \lambda_1(\Omega_n)$$

ossia gli insiemi Ω_n sono tali che $m \leq |\Omega_n| \leq M$.

Visto che $\{u_n\}$ è limitata in $H^1(\mathbb{R}^d)$ esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$, che per brevità indicheremo sempre $\{u_n\}$, e una funzione u tali che $u_n \rightharpoonup u$ in $H^1(\mathbb{R}^d)$. Definiamo quindi

$$\Omega_n := \{u_n > 0\} \quad \text{e} \quad f_n := \frac{Q \mathbb{1}_{\Omega_n}}{\int_{\Omega_n} Q(x) dx}.$$

Per costruzione $\int_{\mathbb{R}^d} f_n = 1$ per ogni n . Possiamo quindi applicare il Lemma di concentrazione-compattatezza sulla successione $\{f_n\}$. Vediamo che i casi (2) e (3) non si possono verificare.

- *Vanishing*: Abbiamo che per ogni $R \in \mathbb{R}^{>0}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{y+B_R} f_n(x) dx = 0.$$

Vale quindi che

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{\int_{y+B_R} Q \mathbb{1}_{\Omega_n} dx}{\int_{\Omega_n} Q(x) dx} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{\int_{\Omega_n \cap B(y,R)} Q dx}{\int_{\Omega_n} Q(x) dx} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{\int_{\Omega_n \cap B(y,R)} c}{\|Q\|_{L^\infty(\Omega_n)} |\Omega_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{|\Omega_n \cap B(y,R)|}{|\Omega_n|}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che $\forall \delta > 0$, definitivamente $\frac{|\Omega_n \cap B(y,R)|}{|\Omega_n|} \leq \delta$. Visto che $|\Omega_n| < +\infty$, per il Corollario 1.9 sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $R > 0$, $\{y_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ tali che

$$\lambda_1(\Omega_n \cap B(y_n, R)) \leq \lambda_1(\Omega_n) + \varepsilon.$$

Considerando per ogni R $B_{\tilde{R}_n} = (\Omega_n \cap B_R)^*$ vale che $|B_{\tilde{R}_n}| \rightarrow 0$ e quindi, visto che $\lambda_1(B_{\tilde{R}_n}) = \frac{\lambda_1(B_1)}{\tilde{R}_n^2}$, segue

$$\lambda_1(\Omega_n) + \varepsilon \geq \lambda_1(\Omega_n \cap B(y_n, R)) \geq \lambda_1(B_{\tilde{R}_n}) \rightarrow +\infty.$$

Concludiamo perchè $\lambda_1(\Omega_n) \rightarrow +\infty$ porta ad un assurdo¹.

- *Splitting*: Per il Lemma di Lions in questo caso possiamo considerare le due funzioni

$$\begin{aligned} f_{n_1} &= f_n \mathbb{1}_{B_{\frac{R_n}{4}}} \\ f_{n_2} &= f_n \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus B_{2R_n}} \end{aligned}$$

tali che:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f_{n_1}^1 &= \frac{1}{\int_{\Omega_n} Q(x) dx} \int_{\Omega_n \cap B_{\frac{R_n}{4}}} Q(x) dx \rightarrow \alpha \\ \int_{\mathbb{R}^d} f_{n_1}^2 &= \frac{1}{\int_{\Omega_n} Q(x) dx} \int_{\Omega_n \cap B_{2R_n}^c} Q(x) dx \rightarrow 1 - \alpha \end{aligned}$$

e dunque

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n - f_{n_1}^1 - f_{n_1}^2 \rightarrow 0.$$

¹L'esclusione di questo caso può essere fatta in un altro modo che si riporta a fine della dimostrazione.

Definiamo ora gli insiemi Ω_n^1, Ω_n^2 come

$$\Omega_n^1 = \Omega_n \cap B_{\frac{R_n}{2}}, \quad \Omega_n^2 = \Omega_n \cap B_{R_n}^c.$$

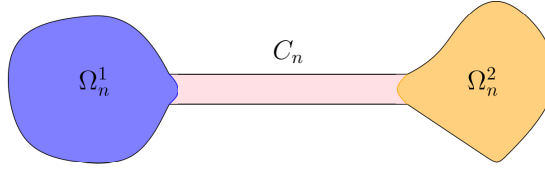
Osserviamo che $d(\Omega_n^1, \Omega_n^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ e che l'insieme Ω_n^2 sta "scappando all'infinito", ossia

$$\text{dist}(\Omega_n^2, 0) \geq R_n \rightarrow +\infty.$$

Vale inoltre che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\int_{\Omega_n} Q(x) dx} \int_{\Omega_n \cap B_{\frac{R_n}{2}}} Q(x) dx &\rightarrow \alpha \\ \frac{1}{\int_{\Omega_n} Q(x) dx} \int_{\Omega_n \cap B_{R_n}^c} Q(x) dx &\rightarrow 1 - \alpha \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere $\Omega_n = \Omega_n^1 \cup \Omega_n^2 \cup C_n$ come vediamo dal disegno qui sotto:



Segue che $f_n = f_{n_1} + f_{n_2} + g_n$. Costruiamo ora delle opportune $\{u_{n_1}\}, \{u_{n_2}\}$ che useremo in seguito. Per definizione delle f_n possiamo considerare $u_n = u_{n_1} + u_{n_2} + v_n$ dove

$$\begin{aligned} u_{n_1} &= u_n \varphi_{\frac{R_n}{2}} & \text{supp } u_{n_1} &\subset \Omega_n^1 \\ u_{n_2} &= u_n (1 - \varphi_{2R_n}) & \text{supp } u_{n_2} &\subset \Omega_n^2 \end{aligned}$$

dove $\varphi_R(x) = \varphi\left(\frac{x}{R}\right)$, con $\varphi(x) = 1$ se $x \in B_{\frac{1}{2}}$ e $\varphi(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R}^d \setminus B_1$. Per esempio basta scegliere φ come segue:

$$\varphi = 1 \text{ su } B_{\frac{1}{2}} \quad \varphi = 0 \text{ su } B_1^c \quad \varphi(x) = \frac{1 - |x|}{\frac{1}{2}} \text{ su } B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}},$$

in questo modo

$$\varphi_R = 1 \text{ su } B_{\frac{R}{2}} \quad \varphi_R = 0 \text{ su } B_R^c \quad \varphi_R(x) = \frac{R - |x|}{\frac{R}{2}} \text{ su } B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}$$

e in particolare $\|\nabla \varphi_R\|_{L^\infty} \leq \frac{2}{R}$. Definiamo ora una nuova successione $\{\tilde{u}_n\}$ e vedremo che è possibile arrivare ad un assurdo. Sia

$$\tilde{u}_n := u_{n_1} + u_{n_2} = u_n \varphi_n$$

dove $\varphi_n = \varphi_{\frac{R_n}{2}} + 1 - \varphi_{2R_n}$ tale che $\|\nabla \varphi_n\|_{L^2} \leq \frac{4}{R_n}$. Vediamo che $\left\{ \frac{\tilde{u}_n}{\|\tilde{u}_n\|_{L^2}} \right\}$ resta una successione minimizzante, ossia che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J} \left(\frac{\tilde{u}_n}{\|\tilde{u}_n\|_{L^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(u_n)$$

Osserviamo infatti che:

– $\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u}_n^2 \rightarrow 1$ per $n \rightarrow +\infty$ infatti:

$$\begin{aligned} 1 - \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u}_n^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} u_n^2 - \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{u}_n|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} u_n^2 (1 - \varphi_n^2) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} u_n^2 \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus (B_{\frac{R_n}{4}} \cup B_{2R_n})} \\ &\leq \|u_n^2\|_{L^\infty} |\mathbb{R}^d \setminus (B_{\frac{R_n}{4}} \cup B_{2R_n})| \\ &\leq \|u_n^2\|_{L^\infty} \frac{\int_{\Omega_n} Q(x) dx}{\int_{\Omega_n} Q(x) dx} \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^d \setminus (B_{\frac{R_n}{4}} \cup B_{2R_n})} Q(x) dx \\ &= \|u_n^2\|_{L^\infty} \frac{\int_{\Omega_n} Q(x) dx}{c} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_n - f_n^1 - f_n^2 \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Questo perchè, come ricordato in precedenza, se u_n è un'autofunzione del laplaciano, allora $\|u_n\|_{L^\infty} \leq C\lambda_1^{\frac{d}{4}} < +\infty$ e inoltre $\int_{\Omega_n} Q(x) dx < +\infty$.

– $\|\nabla \tilde{u}_n\|$ non si discosta di molto da $\|\nabla u_n\|$ infatti:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \tilde{u}|^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 \varphi_n^2 + \int_{\mathbb{R}^d} u_n^2 |\nabla \varphi_n|^2 + 2 \int_{\mathbb{R}^d} u_n \varphi_n \nabla u_n \nabla \varphi_n \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 + \frac{16 \int_{\mathbb{R}^d} u_n^2}{R_n^2} + 2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} u_n^2 \varphi_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 |\nabla \varphi_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 + \frac{16}{R_n^2} + \frac{8}{R_n} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 + o(1). \end{aligned}$$

Vediamo però che esiste $\bar{u}_n \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J} \left(\frac{\bar{u}_n}{\|\bar{u}_n\|_{L^2}} \right) < \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J} \left(\frac{\tilde{u}_n}{\|\tilde{u}_n\|_{L^2}} \right)$. Questo porta ad assurdo per definizione di successione minimizzante, infatti

$$\inf \mathcal{J}(u) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J} \left(\frac{\tilde{u}_n}{\|\tilde{u}_n\|_{L^2}} \right) < \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\bar{u}_n) = \inf \mathcal{J}(u)$$

Osserviamo che se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{u}_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{u}_n\| = 1$ allora è sufficiente verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\bar{u}_n) < \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\tilde{u}_n)$$

infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |\nabla u_n|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{|\nabla u_n|^2}{\|u_n\|^2}$$

è il termine che compare in \mathcal{J} .

Consideriamo

$$\bar{u}_n := u_{n_1} + \|u_{n_2}\|_{L^2} w_{n_2}$$

dove w_{n_2} è l'autofunzione di $\lambda_1((\Omega_n^2)^*)$. Visto che Ω_n^2 si allontana indefinitivamente vale che

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_n^2} Q(x) dx = \int_{\Omega_n^2} Q_\infty dx = \int_{(\Omega_n^2)^*} Q_\infty dx.$$

Allora nel problema di minimizzazione di \mathcal{J} è possibile migliorare strettamente l'energia traslando opportunamente $(\Omega_n^2)^*$. Osserviamo inoltre che considerando la

simmetrizzazione di Ω_n^2 perdiamo la dipendenza da R_n , scriviamo ora quindi B_ρ visto che non serve specificare il raggio con cui lavoriamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{y_n + B_\rho(x_n)} Q < \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_\rho(x_n)} Q_\infty$$

Con questa costruzione riusciamo a migliorare l'energia visto che il termine in Q diminuisce data l'ipotesi sul comportamento all'infinito di Q . Inoltre il "guadagno" ottenuto non dipende dal raggio scelto. Al contempo, visto che siamo su un insieme di egual misura ad Ω_n^2 , $\lambda_1((\Omega_n^2)^*)$ migliora e segue quindi che

$$\lambda_1((\Omega_n^2 + y_n)^*) + \int_{(\Omega_n^2 + y_n)^*} Q(x) dx < \lambda_1((\Omega_n^2)^*) + \int_{(\Omega_n^2 + y_n)^*} Q_\infty < \lambda_1(\Omega_n^2) + \int_{\Omega_n^2} Q(x) dx$$

il che è assurdo.

Abbiamo quindi che solo il caso (1) del Teorema (2.3) si può verificare, ossia: esiste una successione $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^d$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\int_{y_n + B_R} f_n(x) dx \geq 1 - \varepsilon.$$

Vediamo che possiamo inoltre escludere, per un argomento simile a quello precedente, il fatto che $y_n \rightarrow +\infty$. Supponiamo che $y_n \rightarrow +\infty$ e vediamo che è possibile ottenere un miglioramento sul termine in Q . Come fatto in precedenza, consideriamo

$$\varphi_{n,R}(x) = 1 \text{ su } y_n + B_{\frac{R}{2}} \quad \varphi_{n,R}(x) = 0 \text{ su } y_n + B_R^c \quad \varphi_{n,R}(x) = \frac{|x| - \frac{R}{2}}{\frac{R}{2}} \text{ su } y_n + B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}$$

Definiamo $\tilde{u}_n := u_n \varphi_{n,R}$, che per costruzione appartiene a $H^1(\mathbb{R}^d)$. Osserviamo ora che

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{y_n + B_R} Q(x) dx = \int_{y_n + B_R} Q_\infty dx.$$

A questo punto, considerando la simmetrizzazione di $\tilde{\Omega}_n := \{\tilde{u}_n > 0\}$ avremmo un miglioramento dell'energia, infatti come visto sopra, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{y_n + B_R} Q(x) dx < \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{y_n + B_R} Q_\infty dx.$$

mentre $\lambda_1((\tilde{\Omega}_n^*)) \leq \lambda_1((\tilde{\Omega}_n))$ e quindi, traslando opportunamente, avremmo

$$\mathcal{J}(\tilde{u}_n) < \mathcal{J}(u_n)$$

il che è assurdo perchè $\{u_n\}$ era una successione minimizzante per \mathcal{J} .

Abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono y_n, R, L tali che $|y_n| < L$ e

$$\int_{B_{R+L}} f_n \geq \int_{y_n + B_R} f_n \geq 1 - \varepsilon.$$

Per brevità chiameremo $R + L := R_\varepsilon$. Vediamo ora che è possibile ottenere la seguente stima:

$$|\Omega_n \setminus B_{R_\varepsilon}| \leq C\varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Infatti

$$c|\Omega_n \setminus B_{R_\varepsilon}| \leq \int_{\Omega_n \setminus B_{R_\varepsilon}} Q(x) dx = \left(\int_{\Omega_n} Q(x) dx \right) \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_{R_\varepsilon}} f_n < M\varepsilon.$$

A partire da questa stima è possibile dimostrare che $u_n \rightarrow u$ fortemente in $L^2(\mathbb{R}^d)$. Visto che $u_n \rightharpoonup u$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$, è sufficiente mostrare che $\{u_n\} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ sia di Cauchy, ossia $\forall \varepsilon > 0$ cerchiamo N tale che $\forall n, m > N$ si abbia $\|u_n - u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon$. A questo scopo per ogni R consideriamo $\varphi_R \in C_C^\infty(B_R)$ definita come in precedenza, ossia

$$\varphi_R = 1 \text{ su } B_{\frac{R}{2}} \quad \varphi_R = 0 \text{ su } B_R^c \quad 0 \leq \varphi_R \leq 1 \text{ su } B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}$$

e in particolare $\|\nabla \varphi_R\|_{L^\infty} \leq \frac{2}{R}$. Segue che

$$\|u_n - u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|u_n - u_n \varphi_{2R_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|u_n \varphi_{2R_\varepsilon} - u_m \varphi_{2R_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|u_m - u_m \varphi_{2R_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$$

infatti è possibile vedere che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} u_n^2 (1 - \varphi_{2R_\varepsilon})^2 &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_{R_\varepsilon}} u_n^2 (1 - \varphi_{2R_\varepsilon})^2 \\ &\leq \int_{\Omega_n \setminus B_{R_\varepsilon}} u_n^2 \\ &\leq \|u_n^2\|_{L^\infty} |\Omega_n \setminus B_{R_\varepsilon}| < K\varepsilon \end{aligned}$$

mentre la successione $\{u_n \varphi_{2R_\varepsilon}\}_n$ è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R}^d)$. Infatti, per il Teorema di immersione compatta, è sufficiente vedere che è equilimitata in $H^1(B_{2R_\varepsilon})$, ma questo segue visto che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} u_n^2 \varphi_{2R_\varepsilon}^2 &\leq \int_{B_{R_\varepsilon}} u_n^2 \leq 1 \\ \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(u_n \varphi_{2R_\varepsilon})|^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 \varphi_{2R_\varepsilon}^2 + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \varphi_{2R_\varepsilon}|^2 u_n^2 + 2 \int_{\mathbb{R}^d} u_n \varphi_{2R_\varepsilon} \nabla u_n \nabla \varphi_{2R_\varepsilon} \\ &\leq \int_{B_{2R_\varepsilon}} |\nabla u_n|^2 + \frac{4}{R_\varepsilon^2} + \frac{4}{R_\varepsilon} \left(\int_{B_{2R_\varepsilon}} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e poichè avevamo scelto u_n in modo che ∇u_n fossero equilimitati.

A questo punto riusciamo a concludere che esiste un minimo per il nostro problema. Infatti, visto che $u_n \rightharpoonup u$, concludiamo se mostriamo che

$$\mathcal{J}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(u_n).$$

Per semicontinuità della $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}$ è immediato che

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2.$$

Riusciamo a stimare l'altro termine sfruttando la convergenza forte $u_n \rightarrow u$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$. Da questa infatti, a meno di considerare una sottosuccessione, otteniamo che $u_n(x) \rightarrow u(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e quindi segue che

$$\mathbb{1}_{\{u>0\}}(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{u_n>0\}}(x).$$

Allora per il Lemma di Fatou abbiamo che

$$\int_{\{u>0\}} Q(x)dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\{u_n>0\}} Q(x)dx.$$

In conclusione quindi siamo riusciti a dimostrare che

$$\mathcal{J}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + \int_{\{u>0\}} Q(x)dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 + \int_{\{u_n>0\}} Q(x)dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(u_n)$$

e quindi esiste un minimo $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ per il funzionale \mathcal{J} .

Abbiamo quindi dimostrato che il problema preliminare ammette un minimo $u \in \tilde{H}^1(\{u > 0\})$. In particolare, come visto nell'osservazione preliminare, abbiamo che $\Omega := \{u > 0\}$ è minimo per il funzionale \mathcal{F} .

□

Osservazione 2.4

Per escludere la possibilità di *vanishing* abbiamo seguito una strada molto diretta che ha evidenziato le criticità di questo caso, era tuttavia possibile seguire un approccio più teorico grazie al Lemma 2.4. Infatti se per assurdo si verificasse il caso vanishing avremmo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{y+B_R} f_n(x)dx = 0.$$

Questo implicherebbe che $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ fortemente in $L^2(\mathbb{R}^d)$, il che sarebbe assurdo visto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1.$$

Alcuni risultati di regolarità

Nel capitolo precedente abbiamo mostrato che $\Omega = \{u > 0\}$ è soluzione per il problema

$$\min_{\Omega} \tilde{\lambda}_1(\Omega) + \int_{\Omega} Q(x) dx$$

con $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$ soluzione di

$$\min_{u \in H^1(\mathbb{R}^d)} \mathcal{J}(u) := \min_{u \in H^1(\mathbb{R}^d)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + \int_{\{u>0\}} Q(x) dx : \int_{\mathbb{R}^d} u^2 dx = 1 \right\}.$$

Vedremo che il minimo u per questo problema sarà anche la prima autofunzione per l'operatore laplaciano con condizione di Dirichlet nella parte interna di $\Omega := \{u > 0\}$, ossia sarà soluzione debole per

$$\begin{cases} -\Delta u = \tilde{\lambda}_1 u & \text{su int}(\Omega) \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}. \quad (1)$$

In questo capitolo dimostreremo, seguendo l'approccio presentato in [16] modificando opportunamente alcuni risultati, alcune proprietà di regolarità del dominio Ω e della funzione $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$ soluzione di (1). La differenza sostanziale nell'approccio che seguiremo è il fatto di non sapere che il dominio Ω è aperto e dunque che non tutte le variazioni interne sono possibili. Proprio per questo motivo dovremo riscrivere alcuni risultati classici sulla teoria delle equazioni ellittiche, la cui dimostrazione però sfruttava il fatto di essere un aperto.

L'approccio generale che seguiremo sarà quello di sfruttare l'ottimalità della funzione u per il funzionale \mathcal{J} e le variazioni interne che saranno man mano disponibili.

Il risultato principale che riusciremo a dimostrare è il seguente:

Teorema 3.1

Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ una funzione non-negativa tale che:

- u è un minimo per il funzionale \mathcal{J} ,
- u soddisfa la seguente stima sulla frontiera libera: esistono $r_0 > 0$ e $C > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ e ogni $0 < r < r_0$:

$$\int_{\partial B_r(x_0)} u d\mathcal{H}^{d-1} \leq Cr. \quad (3.1)$$

Allora vale che:

- Ω è un aperto e la funzione u è soluzione debole per il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \tilde{\lambda}_1(\Omega)u & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases};$$

- La funzione u è localmente lipschitziana in \mathbb{R}^d . In particolare vale la seguente stima:

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \leq \frac{e^{r_0\sqrt{\lambda}}}{r} C_d \lambda_1^{\frac{d}{4}} \quad \forall 0 < r < r_0.$$

Saremo inoltre in grado di dimostrare che per Ω vale una stima di densità esterna e dunque, come visto nel Teorema 1.27, avremo che il minimo $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$ in realtà sarà una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ e quindi $\tilde{\lambda}_1(\Omega) = \lambda_1(\Omega)$. Questo implica che il minimo trovato per il problema ausiliario (1) è in realtà un minimo anche per il problema originale, ossia

$$\min_{\Omega} \lambda_1(\Omega) + \int_{\Omega} Q(x) dx.$$

3.1 Prime proprietà del minimo u

Come prima cosa vediamo che il minimo $u \in \tilde{H}_0^1(\mathbb{R}^d)$ è una sottosoluzione in \mathbb{R}^d . Vedremo inoltre che u è limitata e che è non-degenere.

Definizione 3.2 - Sottosoluzione

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ misurabile, $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$ diciamo che u è una sottosoluzione se

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} f \varphi \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \varphi \geq 0.$$

Questo equivale a dire che $\Delta u + f \geq 0$ in \mathbb{R}^d nel senso delle distribuzioni.

Lemma 3.3

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ di misura finita, $f \in L^p(\Omega)$ e $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$ minimo per il funzionale \mathcal{J} . Allora $\Delta u + \tilde{\lambda}_1 u \geq 0$ su \mathbb{R}^d nel senso delle distribuzioni.

Dimostrazione. Consideriamo una famiglia di funzioni $p_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

$$p_\varepsilon(t) = 0 \text{ per } t \in (-\infty, 0] \quad p_\varepsilon(t) = 1 \text{ per } t \in [\varepsilon, +\infty) \quad p \in C^\infty(0, \varepsilon),$$

Per costruzione abbiamo che $p'_\varepsilon \geq 0$ e $p_\varepsilon \rightarrow \mathbf{1}_{(0, +\infty)}$. Per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ consideriamo la variazione $v = u + t\varphi p_\varepsilon(u) \in H^1(\mathbb{R}^d)$, che per t sufficientemente piccolo è tale che $\{u > 0\} = \{v > 0\}$. Per minimalità di u abbiamo quindi che

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} v^2 dx} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v|^2 dx.$$

Quindi facendo il calcolo della variazione prima segue che

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{J}(u + t\varphi p_\varepsilon(u)) = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla(\varphi p_\varepsilon(u)) - 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \int_{\mathbb{R}^d} u \varphi p_\varepsilon(u).$$

Abbiamo quindi

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla \varphi p_\varepsilon(u) + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 p'_\varepsilon(u) \varphi = 2\tilde{\lambda}_1 \int_{\mathbb{R}^d} u \varphi p_\varepsilon(u)$$

Osserviamo però che, essendo $\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 p'_\varepsilon(u) \varphi \geq 0$ per ogni ε , si ha

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \nabla (\varphi p_\varepsilon(u)) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 p'_\varepsilon(u) \varphi + \int_{\mathbb{R}^d} p_\varepsilon(u) \nabla u \nabla \varphi \geq \int_{\mathbb{R}^d} p_\varepsilon(u) \nabla u \nabla \varphi.$$

Applicando il Teorema di convergenza dominata segue che

$$\begin{aligned} 2\tilde{\lambda}_1 \int_{\mathbb{R}^d} u \varphi p_\varepsilon(u) &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} u \varphi \\ \int_{\mathbb{R}^d} p_\varepsilon(u) \nabla u \cdot \nabla \varphi &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla \varphi \end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla \varphi - \tilde{\lambda}_1 \int_{\mathbb{R}^d} u \varphi \leq 0$$

che è la tesi. □

Osservazione 3.1

Possiamo dire di più, infatti se $w = u^2$ vale che

$$\Delta w + \tilde{\lambda}_1 w \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}^d.$$

Infatti per ogni $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ possiamo considerare come funzione test $\varphi = \psi u$ per ottenere:

$$-\int \nabla u \cdot (\nabla \psi u + \psi \nabla u) + \tilde{\lambda}_1 \int u^2 \psi \geq 0$$

Ma quindi

$$0 \leq \int |\nabla u|^2 \psi \leq -\int \frac{\nabla(u^2)}{2} \cdot \nabla \psi + \tilde{\lambda}_1 \int u^2 \psi.$$

Per la Proposizione 1.22 vale che

$$\left| \int_{B_r(x_0)} w(x) dx - w(x_0) \right| \leq C_d \|w\|_{L^\infty(B_r(x_0))} r^2.$$

3.1.1 Il minimo u è limitato

Prima di procedere con la dimostrazione della limitatezza di u è necessario richiamare un risultato sulle successioni numeriche.

Lemma 3.4

Siano $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $b > 1$ e K delle costanti positive e sia M_n una successione di numeri reali positivi tale che

$$M_0 = K \quad e \quad M_{n+1} \leq Cb^n M_n^{1+\varepsilon}.$$

Se

$$C \leq \frac{1}{b^{\frac{1}{\varepsilon}} K^\varepsilon}$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0.$$

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su n che esiste $a > 1$ tale che

$$M_n \leq Ka^{-n} \quad \forall n.$$

Il caso $n = 0$ è chiaro. Dimostriamo il passo induttivo:

$$M_{n+1} \leq Cb^n M_n^{1+\varepsilon} \leq Cb^n (Ka^{-n})^{1+\varepsilon}.$$

Cerchiamo quindi a tale che

$$Cb^n (Ka^{-n})^{1+\varepsilon} \leq Ka^{-n-1} \Rightarrow C(ba^{-\varepsilon})^n \leq \frac{1}{aK^\varepsilon}.$$

Ponendo $a = b^{\frac{1}{\varepsilon}}$ e, visto che $C \leq \frac{1}{b^{\frac{1}{\varepsilon}} K^\varepsilon}$, segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0.$$

□

Lemma 3.5

Data $u \geq 0$ tale che $\Delta u + \tilde{\lambda}_1 u \geq 0$ allora $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. Per ogni $t \in \mathbb{R}^{>0}$ consideriamo $\varphi = (u - t)_+ \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Definiamo $\Omega_t := \{u > t\}$. Visto che $u \in L^2$, per la disuguaglianza di Markov sappiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^2 \geq |\Omega_t| t^2.$$

È quindi possibile scegliere t in modo che $|\Omega_t|$ risulti piccolo a piacere.

Usando φ come funzione test abbiamo che

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot (\nabla u \mathbb{1}_{\{u > t\}}) + \tilde{\lambda}_1 \int_{\mathbb{R}^d} u(u - t)_+ \geq 0$$

$$\int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} u(u - t)_+.$$

Osserviamo ora che, per la disuguaglianza¹ di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev e visto che $u = t + (u - t)_+$ su Ω_t si ha la seguente stima:

$$\begin{aligned} \|(u - t)_+\|_{L^{2^*}}^2 &\leq C_d \int |\nabla(u - t)_+|^2 \leq C_d \int (u - t)_+^2 + C_d t \int (u - t)_+ \\ &\leq C_d \|(u - t)_+\|_{L^{2^*}}^2 |\Omega_t|^{\frac{d+2}{d}} + C_d t \|(u - t)_+\|_{L^{2^*}} |\Omega_t|^{\frac{d+2}{2d}}. \end{aligned}$$

Scegliamo $t_0 = L$ in modo che Ω_t sia sufficientemente piccolo per ogni $t \geq t_0$ e poniamo $t_\infty = L + T$. Avremo la tesi se dimostreremo che $|\Omega_{L+T}| = 0$.

Per costruzione abbiamo che per ogni $t \in (t_0, t_\infty)$

$$\|(u - t)_+\|_{L^{2^*}} \leq C_d t |\Omega_t|^{\frac{d+2}{2d}}.$$

Vale anche che $\forall s \geq t$

$$(s - t) |\Omega_s|^{\frac{d-2}{2d}} \leq \|(u - t)_+\|_{L^{2^*}},$$

dunque

$$(s - t) |\Omega_s|^{\frac{d-2}{2d}} \leq C_d t |\Omega_t|^{\frac{d+2}{2d}}.$$

Consideriamo ora le successioni

$$t_n = L + (1 - 2^{-n})T \quad M_n = |\Omega_{t_n}|$$

così da avere

$$(t_{n+1} - t_n) M_{n+1}^{\frac{d-2}{2d}} \leq C_d t_n M_n^{\frac{d+2}{2d}}$$

che significa

$$M_{n+1} \leq C_d \left(2^{n+1} \left(1 + \frac{L}{T} \right) \right)^{\frac{2d}{d-2}} M_n^{\frac{d+2}{d-2}}.$$

A questo punto è dunque possibile scegliere il livello L e la costante T : scegliendo $T = L$ e L tale che M_0 sufficientemente piccolo, abbiamo che

$$C = 2^{\frac{2d}{d-2}} \leq \frac{1}{2^{\frac{4d}{\varepsilon(d-2)}} M_0^\varepsilon}$$

dove $\varepsilon = \frac{4}{d-2}$. Dunque, nel caso $d \geq 3$, abbiamo che, per il Lemma 3.4

$$|\Omega_{L+T}| = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$$

ossia la tesi. □

¹Data $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ per la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev sappiamo che $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$ dove $2^* = \frac{2d}{d-2}$. Nel seguito indicheremo con $(2^*)'$ l'esponente coniugato a 2^* .

3.1.2 Il minimo u è non-degenere

Ricordiamo la seguente definizione:

Definizione 3.6 - Non-degenerazione

Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ una funzione non negativa. Diciamo che è “non-degenere” se esistono $\kappa_0 > 0$ e $r_0 \in \mathbb{R}^{>0}$ tale che

$$(\|u\|_{L^\infty(B_r)} \leq \kappa_0 r) \Rightarrow (u = 0 \text{ su } B_{\frac{r}{2}}).$$

Osservazione 3.2

Osserviamo che le seguenti sono equivalenti:

1. u è non-degenere;
2. Esistono $\kappa_0 > 0$ e $r_0 \in \mathbb{R}^{>0}$ tali che per ogni raggio $r < r_0$ per cui $|B_{\frac{r}{2}} \cap \Omega| > 0$ allora

$$\int_{B_r(x_0)} u^2(x) dx > \kappa_0 r.$$

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che per la Proposizione 1.22 ha senso parlare della definizione puntuale di una funzione di Sobolev. Vediamo ora che le due definizioni sono equivalenti:

2. \Rightarrow 1.: se per assurdo esistesse $x_0 \in B_{\frac{r}{2}}$ tale che $u(x_0) \neq 0$ allora avremmo che $|B_{\frac{r}{2}} \cap \Omega| > 0$ e quindi

$$\kappa_0 r < \int_{B_r(x_0)} u^2 \leq \|u\|_{L^\infty} \leq \kappa_0 r$$

il che è assurdo per r abbastanza piccolo.

1. \Rightarrow 2.: Come osservato in precedenza vale che

$$\int_{B_r(x_0)} u^2(x) dx - u^2(x_0) \geq C_d \|u^2\|_{L^\infty(B_r(x_0))} r^2$$

ossia

$$u^2(x_0) \leq \int_{B_r(x_0)} u^2(x) dx - C r^2 \quad \forall x_0 \in B_r$$

Se $|B_{\frac{r}{2}} \cap \Omega| > 0$ significa che $u \neq 0$ in $B_{\frac{r}{2}}$ e quindi $\|u\|_{L^\infty(B_r)} > \kappa_0 r$. Quindi se valesse $\int_{B_r} u^2 \leq \kappa_0 r$ allora

$$\kappa_0 r < \|u^2\|_{L^\infty(B_r)} \leq 2^d \int_{B_r} u^2 - C r^2 \leq \frac{2^d}{|B_r|} \kappa_0 r - C r^2 \leq \kappa_0 r$$

che è assurdo. □

Osservazione 3.3

Osserviamo che il problema in \mathbb{R}^d

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = a & \text{su } B_R \setminus B_{\frac{R}{2}} \\ \varphi = b & \text{su } \partial B_R \\ \varphi = 0 & \text{su } \partial B_{\frac{R}{2}} \end{cases}$$

ha soluzione:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{a}{2d}r^2 + c_1 \log(r) + c_2 && \text{per } d = 2 \\ \varphi &= \frac{a}{2d}r^2 - \frac{c_1}{d-2}r^{d-2} + c_2 && \text{per } d \geq 3\end{aligned}$$

dove le costanti c_1, c_2 sono, nel caso $d \geq 3$:

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{d-2}{2^{d-2}-1} \left(bR^{d-2} - \frac{3}{8d}aR^d \right) \\ c_2 &= \frac{1}{2^{d-2}-1} \left(2^{d-2}b - \frac{2^d-1}{8d}aR^2 \right).\end{aligned}$$

Inoltre il gradiente $|\nabla\varphi|$ soddisfa la seguente disuguaglianza su $\partial B_{\frac{R}{2}}$:

$$|\nabla\varphi| \leq C_d \frac{b}{R}$$

per un'opportuna costante dimensionale C_d .

Dimostrazione. Cerchiamo una soluzione $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ nella sottoclasse delle funzioni radiali. Quando avremo mostrato che una soluzione così fatta esiste, allora per l'unicità della soluzione per il problema di Poisson avremo che questa è la soluzione anche per la classe $H^1(\mathbb{R}^d)$. Osserviamo quindi che l'equazione $-\Delta\varphi = a$ riscritta in forma polare diventa:

$$\frac{1}{r^{d-1}}\partial_r(r^{d-1}\partial_r\varphi) = a.$$

Se integriamo una prima volta otteniamo che

$$r^{d-1}\partial_r\varphi = \frac{a}{d}r^d + c_1$$

e integrando un'altra volta, per semplicità ci limitiamo al caso $d \geq 3$, otteniamo che

$$\varphi = \frac{a}{2d}r^2 - \frac{c_1}{d-2}r^{d-2} + c_2.$$

Le costanti le troviamo risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} b = \varphi(R) &= \frac{a}{2d}R^2 - \frac{c_1}{d-2}\frac{1}{R^2} - c_2 \\ 0 = \varphi\left(\frac{R}{2}\right) &= \frac{a}{8d}R^2 - \frac{2^{d-2}c_1}{d-2}\frac{1}{R^{d-2}} + c_2 \end{cases}.$$

Mostriamo ora la stima sul gradiente su $\partial B_{\frac{R}{2}}$. Visto che per funzioni radiali abbiamo l'uguaglianza $\nabla\varphi(x) = \varphi'(r)\frac{x}{r}$ allora è sufficiente osservare che

$$\varphi'\left(\frac{R}{2}\right) = C_d b \left(\frac{1}{R} + R \right) \leq \frac{b}{R}.$$

□

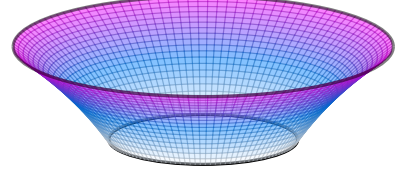
Lemma 3.7

Sia $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$ soluzione di (1). Allora la funzione u è non degenere.

Dimostrazione. Sia $u > 0$ su $B_{\frac{r}{2}}$. Vediamo che $\|u\|_{L^\infty(B_r)} > \kappa_0 r$.

Consideriamo $\tilde{u} = \begin{cases} u \wedge \varphi_r & \text{su } B_r \\ u & \text{su } \mathbb{R}^d \setminus B_r \end{cases}$ dove φ_r è soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_r = \tilde{\lambda}_1(\Omega) \|u\|_{L^\infty(B_r)} & B_r \setminus B_{\frac{r}{2}} \\ \varphi_r = 0 & \overline{B_{\frac{r}{2}}} \\ \varphi_r = \|u\|_{L^\infty(B_r)} & \partial B_r \end{cases}.$$



Per l'Osservazione 3.3 abbiamo che $|\nabla \varphi_r| \leq \frac{\|u\|_{L^\infty(B_r)}}{r}$.

Per costruzione $\varphi_r \geq u$ su ∂B_r e quindi $u \wedge \varphi_r \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Notiamo preliminarmente le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_r} u^2 + \int_{B_r} |u \wedge \varphi_r|^2 = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_r} u^2 + \int_{B_r \setminus B_{\frac{r}{2}}} |u \wedge \varphi_r|^2 \\ \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \tilde{u}|^2 &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_r} |\nabla u|^2 + \int_{B_r} |\nabla(u \wedge \varphi_r)|^2 = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_r} |\nabla u|^2 + \int_{B_r \setminus B_{\frac{r}{2}}} |\nabla(u \wedge \varphi_r)|^2 \end{aligned}$$

Sfruttiamo ora l'ottimalità per il funzionale $\mathcal{J}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + \int_{\{u>0\}} Q(x) dx$ della funzione u e confrontiamola con la funzione test \tilde{u} (per alleggerire la notazione scriveremo $\Omega_{\frac{r}{2}} := B_{\frac{r}{2}} \cap \{u > 0\}$ e $A_r := B_r \setminus B_{\frac{r}{2}}$):

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + \int_{\{u>0\}} Q(x) dx \leq \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u}^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \tilde{u}|^2 + \int_{\{\tilde{u}>0\}} Q(x) dx$$

$$\tilde{\lambda}_1 \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u}^2 + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u}^2 \right) \int_{\Omega_{\frac{r}{2}}} Q(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_r} |\nabla u|^2 + \int_{B_r} |\nabla(u \wedge \varphi_r)|^2$$

$$\tilde{\lambda}_1 \int_{B_r} ((u \wedge \varphi_r)^2 - u^2) + \tilde{\lambda}_1 \int_{\mathbb{R}^d} u^2 + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u}^2 \right) \int_{\Omega_{\frac{r}{2}}} Q(x) dx \leq \tilde{\lambda}_1 + \int_{B_r} (|\nabla(u \wedge \varphi_r)|^2 - |\nabla u|^2)$$

$$\tilde{\lambda}_1 \int_{A_r} ((u \wedge \varphi_r)^2 - u^2) - \tilde{\lambda}_1 \int_{B_{\frac{r}{2}}} u^2 = \tilde{\lambda}_1 \int_{A_r} ((u \wedge \varphi_r) + u)((u \wedge \varphi_r) - u) - \tilde{\lambda}_1 \int_{B_{\frac{r}{2}}} u^2.$$

Sviluppando ulteriormente il conto, ricordando che $\varphi_r = 0$ su $B_{\frac{r}{2}}$ quindi $u \wedge \varphi_r = 0$ su $B_{\frac{r}{2}}$ e sull'anello vale che $\varphi_r \geq u$, troviamo la seguente stima:

$$-\tilde{\lambda}_1 \int_{B_{\frac{r}{2}}} u^2 + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u}^2 \right) \int_{\Omega_{\frac{r}{2}}} Q(x) dx \leq \int_{B_r} (|\nabla(u \wedge \varphi_r)|^2 - |\nabla u|^2) - \tilde{\lambda}_1 \int_{A_r} ((u \wedge \varphi_r) + u)((u \wedge \varphi_r) - u)$$

Andiamo ora a stimare i due membri della disequazione di sopra singolarmente. Per il termine a sinistra vale che:

$$\begin{aligned}
\int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|^2 + \left(1 - \int_{B_r} u^2\right) \int_{\Omega_{\frac{r}{2}}} Q - \tilde{\lambda}_1 \int_{B_{\frac{r}{2}}} u^2 &\geq \int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|^2 + \frac{c}{2} |\Omega_{\frac{r}{2}}| - \tilde{\lambda}_1 \int_{B_{\frac{r}{2}}} u^2 \\
&\geq \int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|^2 + \frac{c}{2} |\Omega_{\frac{r}{2}}| - \tilde{\lambda}_1 \|u^2\|_{\infty} |\Omega_{\frac{r}{2}}| \\
&\geq \int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|^2 + \frac{c}{2} |\Omega_{\frac{r}{2}}| - \tilde{\lambda}_1 Cr^2 |\Omega_{\frac{r}{2}}| \\
&\geq \int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|^2 + \left(\frac{c}{2} - \tilde{\lambda}_1 cr_0^2\right) |\Omega_{\frac{r}{2}}| \\
&\geq \int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|^2 + \frac{c}{4} |\Omega_{\frac{r}{2}}|
\end{aligned}$$

per un appropriato r_0 .

Per stimare il termine di destra ricordiamo preliminarmente che $u \wedge \varphi_r = u - (u - \varphi_r)_+$ e quindi

$$\nabla(u \wedge \varphi_r) = \nabla u - \nabla u \mathbb{1}_{\{u \geq \varphi_r\}}.$$

Segue che:

$$\begin{aligned}
-\int_{A_r} |\nabla u|^2 + \int_{A_r} |\nabla(u \wedge \varphi_r)|^2 &= \int_{A_r} (|\nabla u|^2 - 2\nabla u \nabla(u - \varphi_r)_+ + |\nabla(u - \varphi_r)_+|^2 - |\nabla u|^2) \\
&= \int_{A_r} |\nabla(u - \varphi_r)_+ (\nabla(u - \varphi_r) - 2\nabla u)| \\
&= -\int_{A_r} \nabla(u - \varphi_r) \nabla(u + \varphi_r) \\
&= -\int_{A_r} \nabla(u - \varphi_r)_+ \nabla(u - \varphi_r + 2\varphi_r) \\
&= -\int_{A_r} |\nabla(u - \varphi_r)_+|^2 - 2 \int_{A_r} \nabla \varphi_r \nabla(u - \varphi_r)_+
\end{aligned}$$

Applicando il Teorema della divergenza troviamo che

$$-2 \int_{A_r} \nabla \varphi_r \nabla(u - \varphi_r)_+ = 2 \int_{A_r} \Delta \varphi_r (u - \varphi_r)_+ - 2 \int_{\partial(A_r)} (u - \varphi_r)_+ \nabla \varphi_r$$

Ma quindi usando l'equazione soddisfatta da φ_r segue che

$$\begin{aligned}
-\int_{A_r} |\nabla u|^2 + \int_{A_r} |\nabla(u \wedge \varphi_r)|^2 &= \\
&= -\int_{A_r} |\nabla(u - \varphi_r)_+|^2 + 2 \int_{A_r} \Delta \varphi_r (u - \varphi_r)_+ - 2 \int_{\partial(A_r)} (u - \varphi_r)_+ \nabla \varphi_r d\mathcal{H}^{d-1} \\
&= -\int_{A_r} |\nabla(u - \varphi_r)_+|^2 - 2\tilde{\lambda}_1 \|u\|_{L^\infty} \int_{A_r} (u - \varphi_r)_+ + 2 \int_{\partial B_{\frac{r}{2}}} u |\nabla \varphi_r| d\mathcal{H}^{d-1} \\
&\leq -2\tilde{\lambda}_1 \|u\|_{L^\infty} \int_{A_r} (u - \varphi_r)_+ + 2 \int_{\partial B_{\frac{r}{2}}} u |\nabla \varphi_r| d\mathcal{H}^{d-1} \\
&= -2\tilde{\lambda}_1 \|u\|_{L^\infty} \int_{A_r} (u - (u \wedge \varphi_r)) + 2 \int_{\partial B_{\frac{r}{2}}} u |\nabla \varphi_r| d\mathcal{H}^{d-1}.
\end{aligned}$$

Quindi ora

$$\begin{aligned}
& \int_{A_r} (|\nabla(u \wedge \varphi_r)|^2 - |\nabla u|^2) - \tilde{\lambda}_1 \int_{A_r} ((u \wedge \varphi_r) + u)((u \wedge \varphi_r) - u) \\
& \leq 2 \int_{\partial B_{\frac{r}{2}}} u |\nabla \varphi_r| d\mathcal{H}^{d-1} - 2\tilde{\lambda}_1 \|u\|_{L^\infty} \int_{A_r} (u - \varphi_r)_+ + \tilde{\lambda}_1 \int_{A_r} ((u \wedge \varphi_r) + u)(u - (u \wedge \varphi_r)) \\
& \leq 2 \int_{\partial B_{\frac{r}{2}}} u |\nabla \varphi_r| d\mathcal{H}^{d-1} - 2\tilde{\lambda}_1 \|u\|_{L^\infty} \int_{A_r} (u - (u \wedge \varphi_r)) + \tilde{\lambda}_1 \int_{A_r} (2u(u - (u \wedge \varphi_r))) \\
& \leq 2 \int_{\partial B_{\frac{r}{2}}} u |\nabla \varphi_r| d\mathcal{H}^{d-1} - 2\tilde{\lambda}_1 \|u\|_{L^\infty} \int_{A_r} (u - (u \wedge \varphi_r)) + 2\tilde{\lambda}_1 \|u\|_{L^\infty} \int_{A_r} (u - (u \wedge \varphi_r)) \\
& = 2 \int_{\partial B_{\frac{r}{2}}} u |\nabla \varphi_r| d\mathcal{H}^{d-1}.
\end{aligned}$$

Per il Teorema della traccia per funzioni $W^{1,1}(B_{\frac{r}{2}})$ possiamo vedere che:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_{\frac{r}{2}}} u d\mathcal{H}^{d-1} & \leq C_d \left(\frac{2}{r} \int_{B_{\frac{r}{2}}} u(x) dx + \int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|(x) dx \right) \\
& \leq C_d \left(\frac{2}{r} \int_{B_{\frac{r}{2}}} u(x) dx + \left(\int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} |B_{\frac{r}{2}} \cap \{u > 0\}|^{\frac{1}{2}} \right) \\
& \leq C_d \left(\frac{2}{r} \int_{B_{\frac{r}{2}}} u(x) dx + \frac{1}{2} \int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} |B_{\frac{r}{2}} \cap \{u > 0\}| \right) \\
& \leq 2C_d \left(\frac{2}{r} \|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|^2 dx + |B_{\frac{r}{2}} \cap \{u > 0\}| \right).
\end{aligned}$$

Ricordiamo che la soluzione φ_r è tale che $|\nabla \varphi| \leq \frac{\|u\|_{L^\infty(B_r)}}{r}$ su $\partial B_{\frac{R}{2}}$ e quindi

$$\int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|^2 + \frac{c}{4} |\Omega_{\frac{r}{2}}| \leq 2C_d \frac{\|u\|_{L^\infty(B_r)}}{r} \left(\frac{1}{r} \|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|^2 dx + |\Omega_{\frac{r}{2}}| \right).$$

Per concludere vediamo che con questa stima si ottiene che $\|u\|_{L^\infty(B_r)} > \kappa_0 r$. Vediamo due casi:

- Se $\frac{c}{4} \geq 1$ allora:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|^2 + |\Omega_{\frac{r}{2}}| & \leq \int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|^2 + \frac{c}{4} |\Omega_{\frac{r}{2}}| \\
& \leq 2C_d \frac{\|u\|_{L^\infty(B_r)}}{r} \left(\frac{1}{r} \|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|^2 dx + |\Omega_{\frac{r}{2}}| \right)
\end{aligned}$$

e quindi

$$1 \leq 2C_d \frac{\|u\|_{L^\infty(B_r)}}{r} \left(\frac{1}{r} \|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \kappa_{0,1} r < \|u\|_{L^\infty(B_r)}.$$

- Se $\frac{c}{4} < 1$ allora:

$$\begin{aligned} \frac{c}{4} \left(\frac{1}{2} \int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|^2 + |\Omega_{\frac{r}{2}}| \right) &< \int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|^2 + \frac{c}{4} |\Omega_{\frac{r}{2}}| \\ &\leq 2C_d \frac{\|u\|_{L^\infty(B_r)}}{r} \left(\frac{1}{r} \|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \int_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u|^2 dx + |\Omega_{\frac{r}{2}}| \right) \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{c}{4} \leq 2C_d \frac{\|u\|_{L^\infty(B_r)}}{r} \left(\frac{1}{r} \|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \kappa_{0,2} r < \|u\|_{L^\infty(B_r)}$$

Ponendo $\kappa_0 = \max \{ \kappa_{0,1}, \kappa_{0,2} \}$, abbiamo che

$$\|u\|_{L^\infty(B_r)} > \kappa_0 r.$$

□

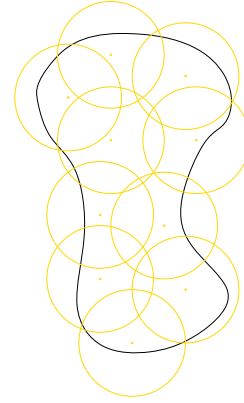
3.2 Il Dominio Ω è limitato

Teorema 3.8

Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ minimo di \mathcal{J} . Allora $\Omega := \{u > 0\}$ è limitato.

Dimostrazione. Sia r_0 il raggio dato dal Lemma 3.7. Dimostriamo preliminarmente che il dominio Ω è ricoperto da un numero finito di palle di raggio $2r_0$.

Sia $x_0 \in \Omega$ e consideriamo $B_{2r_0}(x_0)$. Se $\Omega \subseteq B_{2r_0}(x_0)$ la tesi è verificata. In caso contrario si ha $\Omega \setminus B_{2r_0}(x_0) \neq \emptyset$. Sia quindi $x_1 \in \Omega \setminus B_{2r_0}(x_0)$. Nel caso in cui $\Omega \subseteq B_{2r_0}(x_0) \cup B_{2r_0}(x_1)$ abbiamo la tesi, sennò iteriamo il ragionamento di prima e consideriamo $x_2 \in \Omega \setminus (B_{2r_0}(x_0) \cup B_{2r_0}(x_1))$.



In generale quindi, al passo n abbiamo due possibilità:

- $\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} B_{2r_0}(x_i)$.
- $x_n \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_{2r_0}(x_i)$.

Supponiamo di essere nel secondo caso, quindi

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_{2r_0}(x_n).$$

Per costruzione delle palle vale che $B_{r_0}(x_i) \cap B_{r_0}(x_j) = \emptyset$ per ogni $i \neq j$. Si ha inoltre che $|\Omega \cap B_{r_0}(x_n)| > 0$ per ogni n dunque, essendo u non degenera, vale che

$$\int_{B_{2r_0}(x_n)} u^2 \geq C.$$

Visto che $\int_{\mathbb{R}^d} u^2 = 1$, Ω può essere ricoperto solo da un numero finito di palle, se così non fosse infatti avremmo che $\int_{\mathbb{R}^d} u^2 = +\infty$.

Abbiamo quindi che Ω è ricoperto da un numero finito di palle di raggio $2r_0$. Vediamo che queste non possono scappare all'infinito, così avremo che Ω è limitato.

Supponiamo per assurdo che gli insiemi $B_{2r_0}(x_n)$ si allontanino indefinitamente. Ricordiamo che $Q(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} Q_\infty$ e dunque, per un'opportuna traslazione y_n , vale che

$$\int_{y_n + B_{2r_0}(x_n)} Q < \int_{B_{2r_0}(x_n)} Q_\infty.$$

Quindi abbiamo migliorato l'energia \mathcal{J} , ossia

$$\min_{v \in H^1(\mathbb{R}^d)} \mathcal{J}(v) < \mathcal{J}(u),$$

il che è assurdo visto che u è il minimo di \mathcal{J} . □

3.3 Stima del Laplaciano e conseguenze

Lemma 3.9 - Stima del Laplaciano

Data $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$ minimo per il funzionale \mathcal{J} , esiste r_0 tale che per ogni palla $B_r(x_0)$ con $0 < r < r_0$ vale che

$$\Delta u(B_r(x_0)) \leq Cr^{d-1}.$$

Dimostrazione. Ricordiamo la seguente definizione intesa nel senso delle distribuzioni:

$$\Delta u(B_R) := - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \nabla \mathbf{1}_{B_R} dx.$$

Visto che u è sottosoluzione su \mathbb{R}^d abbiamo che la misura μ associata a $\Delta u + \tilde{\lambda}_1 u$, ossia

$$\mu(\varphi) := - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \nabla \varphi dx + \tilde{\lambda}_1 \int_{\mathbb{R}^d} u \varphi \quad \text{per ogni } \varphi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d),$$

è una misura positiva. Dimostriamo preliminarmente che

$$\mu(\varphi) \leq Cd r^{\frac{d}{2}} \|\nabla \varphi\|_{L^2(B_r)} \quad \text{per ogni } \varphi \in C_C^\infty(B_r) \text{ e per ogni } r \leq r_0.$$

Consideriamo $v \in C_C^\infty(B_r)$. Visto che $u + v \in H_0^1(B_r)$ possiamo usarlo come competitore. Per minimalità di u segue che:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + \int_{\{u>0\}} Q(x) dx \leq \frac{1}{\int (u+v)^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(u+v)|^2 + \int_{\{u+v>0\}} Q(x) dx.$$

Riarrangiando i termini:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 \int_{B_r} u^2 + \tilde{\lambda}_1 \int_{B_r} v^2 + 2\tilde{\lambda}_1 \int_{B_r} uv &\leq \tilde{\lambda}_1 + \int_{B_r} |\nabla v|^2 + 2 \int_{B_r} \nabla u \nabla v + \int_{\{v+u>0\} \setminus \{u>0\}} Q(x) dx \\ \tilde{\lambda}_1 \int_{B_r} v^2 + 2\tilde{\lambda}_1 \int_{B_r} uv &\leq \int_{B_r} |\nabla v|^2 + 2 \int_{B_r} \nabla u \nabla v + C|B_r|. \end{aligned}$$

La disuguaglianza diventa quindi:

$$- \int_{B_r} \nabla u \nabla v + \tilde{\lambda}_1 \int_{B_r} uv \leq \frac{1}{2} \left(-\tilde{\lambda}_1 \int_{B_r} v^2 + \int_{B_r} |\nabla v|^2 + C|B_r| \right) \leq \frac{1}{2} \left(\int_{B_r} |\nabla v|^2 + C|B_r| \right).$$

Per ogni $\varphi \in C_C^\infty(B_r)$ consideriamo $v = r^{\frac{d}{2}} \frac{\varphi}{\|\nabla \varphi\|_{L^2(B_r)}}$ e, per la stima precedente, otteniamo che

$$\begin{aligned} \frac{r^{\frac{d}{2}}}{\|\nabla \varphi\|} \left(- \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \nabla \varphi + \tilde{\lambda}_1 \int_{B_r} u \varphi \right) &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{r^d}{\|\nabla \varphi\|^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \varphi|^2 CC\omega_d r^d \right) \\ - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \nabla \varphi + \tilde{\lambda}_1 \int_{B_r} u \varphi &\leq \frac{(1 + C\omega_d)}{2} \|\nabla \varphi\| r^{\frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

Consideriamo ora la funzione $\varphi \in C_C^\infty(B_{2r})$ tale che

$$\varphi \geq 0 \text{ su } B_{2r} \quad \varphi = 1 \text{ su } B_r \quad \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(B_{2r})} \leq \frac{2}{r}.$$

Per costruzione abbiamo che $\varphi \geq \mathbb{1}_{B_r}$ e dunque per la positività della misura μ otteniamo

$$\Delta u(B_r) - \tilde{\lambda}_1 \int_{B_r} u = \mu(B_r) \leq \mu(\varphi) = \Delta u(\varphi) - \tilde{\lambda}_1 \int_{\mathbb{R}^d} u \varphi.$$

Da questa troviamo che

$$\begin{aligned} \Delta u(B_r) &\leq \mu(\varphi) + \tilde{\lambda}_1 \int_{B_r} u \\ &\leq C_d (2r)^{\frac{d}{2}} \|\nabla \varphi\|_{L^2(B_{2r})} + C_d \|u\|_{L^\infty(B_r)} |B_r| \\ &\leq C r^{d-1} + \tilde{\lambda}_1^{\frac{d+4}{4}} r^d \leq C r^{d-1} \end{aligned}$$

per $r \leq r_0$ con r_0 il raggio dato dal Lemma 3.7. □

Lemma 3.10

Sia $u \in H^1(B_{r_0})$, dove r_0 è il raggio dato dal Lemma 3.7, una funzione non negativa, tale che $\Delta u + \lambda_1 u \geq 0$ in $B_{r_0} \subset \mathbb{R}^d$. Se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\Delta u(B_r) \leq C r^{d-1} \quad \forall 0 < r < r_0 \tag{3.2}$$

allora

$$\int_{\partial B_r} u d\mathcal{H}^{d-1} \leq \frac{C}{d\omega_d} r \quad \forall 0 < r < r_0.$$

Dimostrazione. Consideriamo $u_\varepsilon \in C^\infty(B_r)$ tale che $u_\varepsilon \rightarrow u$ in $H^1(B_r)$. Per ogni u_ε vale che

$$\frac{d}{dr} \int_{\partial B_r} u_\varepsilon d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial B_r} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} d\mathcal{H}^{d-1} = \frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{B_r} \Delta u_\varepsilon(x) dx.$$

Integrando in r vale che

$$\int_{\partial B_r} u_\varepsilon d\mathcal{H}^{d-1} = u(0) + \int_0^r \frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{B_r} \Delta u_\varepsilon(x) dx dr = u(0) + \int_0^r \frac{\Delta u_\varepsilon(B_r)}{d\omega_d r^{d-1}} dr.$$

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ e sfruttando (3.2) segue che

$$\int_{\partial B_r} u d\mathcal{H}^{d-1} = u(0) + \int_0^r \frac{\Delta u(B_r)}{d\omega_d r^{d-1}} dr \leq u(0) + \int_0^r \frac{C r^{d-1}}{d\omega_d r^{d-1}} dr = u(0) + \frac{C}{d\omega_d} r.$$

□

3.4 Dimostrazione del Teorema 3.1

Ricordiamo il teorema:

Teorema 3.11

Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ una funzione non-negativa tale che:

- u è un minimo per il funzionale \mathcal{J} ;
- u soddisfa la seguente stima sulla frontiera libera: esistono $r_0 > 0$ e $C > 0$ tale

che per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ e ogni $0 < r < r_0$:

$$\int_{\partial B_r(x_0)} u d\mathcal{H}^{d-1} \leq Cr. \quad (3.3)$$

Allora vale che:

- Ω è un aperto e la funzione u è soluzione debole per il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \tilde{\lambda}_1(\Omega)u & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases};$$

- La funzione u è localmente lipschitziana in \mathbb{R}^d . In particolare vale la seguente stima:

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \leq \frac{e^{r_0\sqrt{\lambda}}}{r} C_d \lambda_1^{\frac{d}{4}} \quad \forall 0 < r < r_0.$$

Dimostrazione. Visto che $u \geq 0$, per vedere che $\{u > 0\}$ aperto dimostriamo che $\{u = 0\}$ è chiuso. Sia $x_n \rightarrow x$ con $x_n \in \{u = 0\}$ e vediamo che $x \in \{u = 0\}$. Visto che u è soluzione, per la stima Laplaciana, abbiamo che

$$\int_{B_R(x_n)} u(z) dz \leq u(x_n) + Cr = Cr \quad \forall 0 < r < r_0$$

Allora per continuità dell'operatore integrale

$$\int_{B_R(x_n)} u(z) dz \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(x)} u(z) dz,$$

ma quindi

$$\int_{B_R(x)} u(z) dz \leq Cr \quad \forall 0 < r < r_0.$$

Quindi, visto che x_0 è un punto di Lebesgue, abbiamo che

$$u(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} u(z) dz \leq \lim_{r \rightarrow 0} Cr = 0$$

ossia $u(x) = 0$ e quindi $x \in \{u = 0\}$.

Prendiamo $K \subset \Omega$ compatto. Vogliamo vedere che $\inf_{x \in K} u > 0$

Supponiamo per assurdo $\inf_{x \in K} u = 0$. Sia quindi $x_n \rightarrow x$, allora

$$\int_{B_r(x_n)} u(z) dz \leq u(x_n) + Cr$$

ma

$$\int_{B_r(x)} u(z) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(x_n)} u(z) dz \leq \lim Cr.$$

Quindi $x \in K$ tale che $u(x) = 0$, assurdo perchè $x \in K$.

Sia ora $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e considero per t abbastanza piccolo (precisamente se $t \leq \frac{\inf u}{\sup |\varphi|}$) allora $u + t\varphi > 0$ e quindi

$$\mathcal{J}(u) \leq \mathcal{J}(u + t\varphi).$$

Visto che per t sufficientemente piccolo vale che $\{u > 0\} = \{u + t\varphi > 0\}$, segue che

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} (u + t\varphi)^2 dx} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(u + t\varphi)|^2 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Allora

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \left(\frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} (u + t\varphi)^2 dx} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(u + t\varphi)|^2 dx \right) \\ &= \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} u^2} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla \varphi - 2\lambda_1 \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} u^2} \int_{\mathbb{R}^d} u\varphi \end{aligned}$$

ossia u è soluzione debole per

$$-\Delta u = \lambda_1 u.$$

Vediamo che u è lipschitziana. Data $B_r \subset \Omega$ vale che $-\Delta u(x) = \lambda_1 u(x)$ in B_r . Ha senso parlare dei valori puntuali perchè, nel dominio di risoluzione Ω , sappiamo che $u \in C^\infty(\Omega)$. Consideriamo $w(x, t) = u(x)e^{t\sqrt{\lambda}}$ e vediamo che è armonica su $B_r \times (-r, r)$.

$$\begin{aligned} \Delta_{x,t} w &= \Delta_x w + \partial_{tt} w \\ &= e^{t\sqrt{\lambda}} \Delta_x w + u(x) \lambda e^{\lambda\sqrt{t}} \\ &= e^{t\sqrt{\lambda}} (-\lambda u) + u(x) \lambda e^{\lambda\sqrt{t}} = 0. \end{aligned}$$

Allora usando la stima del gradiente² segue che

$$\begin{aligned} |\nabla u|(0) &\leq |\nabla_x w|(0, t) \leq \frac{1}{r} \|w\|_{L^\infty(B_r) \times (-r, r)} \\ &\leq \frac{1}{r} \|u\|_{L^\infty(B_r)} e^{r\sqrt{\lambda}} \\ &\leq \frac{e^{r_0\sqrt{\lambda}}}{r} \|u\|_{L^\infty(B_r)} \end{aligned}$$

e quindi abbiamo la stima cercata. □

3.5 Stima di densità esterna

Ricordiamo due strumenti molto utili che serviranno a ottenere una stima di densità esterna per il nostro dominio Ω .

Definizione 3.12 - Estensione armonica

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(\Omega)$. Data $B_r \subset \Omega$ definiamo l'estensione armonica di u su B_r come soluzione $h \in H^1(B_r)$ del problema:

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{su } B_r \\ h = u & \text{su } \partial B_r \end{cases}$$

²Per una dimostrazione vedasi il Teorema 7, Capitolo 2 in [5].

Proposizione 3.13 - Disuguaglianza di Harnack

Sia u una funzione non negativa e armonica in Ω . Allora per ogni aperto connesso relativamente compatto $U \subset \Omega$ vale che

$$\sup_{x \in U} u(x) \leq C \inf_{x \in U} u(x)$$

dove la costante C dipende solamente dal dominio U .

Dimostrazione. Data una funzione armonica in Ω per il teorema della media si ha che per ogni r tale che $B_r \subset \Omega$ vale:

$$u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u(x) dx = \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Sia quindi $\text{dist}(\partial\Omega, U) = 4r$, allora

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{B_{2r}(x)} u(z) dz = \frac{1}{\omega_n 2^{d} r^d} \int_{B_{2r}(x)} u(z) dz \\ &\geq \frac{1}{\omega_n 2^{d} r^d} \int_{B_r(y)} u(z) dz \\ &\geq \frac{1}{2^d} \int_{B_r(y)} u(z) dz = \frac{u(y)}{2^d}. \end{aligned}$$

Dati due qualsiasi punti in U , essendo U connesso, è possibile trovare un cammino di N nodi in cui ogni segmento ha lunghezza $\leq r$ che connetta x a y . Ma allora per la stima precedente vale che

$$u(x) \geq \frac{u(y)}{2^{dN}}.$$

ovvero la tesi ponendo $C = 2^{-dN}$. □

Teorema 3.14 - Stime di densità

Se u è una soluzione del problema (1) allora esiste una costante $\delta_0 \in (0, 1)$ dipendente dalla dimensione d , dalla costante di Lipschizianità di u e dalla costante di non degenerazione κ_0 tale che

$$\delta_0 \leq \frac{|\Omega \cap B_r(x_0)|}{|B_r(x_0)|} \leq 1 - \delta_0$$

per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ e ogni $r \in \mathbb{R}^{>0}$.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo supporre $x_0 = 0$.

La stima dal basso segue abbastanza direttamente: visto che $0 \in \partial\Omega$, la non degenerazione implica che

$$\|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} \geq \kappa_0 \frac{r}{2}.$$

Allora esiste $y \in B_{\frac{r}{2}}$ tale che $u(y) \geq \kappa_0 \frac{r}{2}$. Per la continuità di u vale quindi che $u(x) > 0$ su una palla $B_\rho(x_0)$ in cui $\rho = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\kappa_0 r}{2L}\}$ e dove usiamo inoltre che

$$u(x) \leq L|x|.$$

Vale quindi che $|B_\rho \cap \Omega| > 0$.

Vediamo ora l'altra stima:

$$|\{u \geq 0\} \cap B_r| = |\{u = 0\} \cap B_r| + |\{u > 0\} \cap B_r|$$

quindi

$$|\{u > 0\} \cap B_r| \leq |B_r| - |\{u = 0\} \cap B_r|.$$

Stimiamo quindi $|\{u = 0\} \cap B_r|$.

Consideriamo la funzione $h + w$ dove h e w sono le soluzioni di

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{su } B_r \\ h = u & \text{su } \partial B_r \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta w = \tilde{\lambda}_1 \|u\|_{L^\infty} & \text{su } B_r \\ w = 0 & \text{su } \partial B_r \end{cases}.$$

Possiamo scrivere esplicitamente la soluzione del secondo problema: $w = \tilde{\lambda}_1 \|u\|_{L^\infty} \frac{R^2 - |x|^2}{2d}$. Vale in particolare che

$$\|w\|_{L^\infty(B_R)} = \tilde{\lambda}_1 \|u\|_{L^\infty(B_R)} \frac{R^2}{2d}.$$

Osserviamo che

$$\begin{cases} -\Delta(h + w) \geq -\Delta u & \text{su } B_r \\ h + w = u & \text{su } \partial B_r \end{cases}$$

vale quindi che $u \leq h + w$ su B_r e quindi, per minimalità di u abbiamo che

$$\int_{B_r} |\nabla u|^2 + \int_{\{u>0\}} Q(x) dx \leq \frac{1}{\int (h+w)^2} \int_{B_r} |\nabla(h+w)|^2 + \int_{\{h+w>0\}} Q(x) dx.$$

Sfruttando che $\int (h+w)^2 \geq \int u^2$ possiamo riscrivere

$$\int_{B_r} |\nabla u|^2 - \int_{B_r} |\nabla h|^2 - \int_{B_r} |\nabla w|^2 \leq \int_{\{h+w\}} Q(x) dx - \int_{\{u>0\}} Q(x) dx.$$

Riscrivendo si ha

$$\int_{\{h+w>0\}} Q(x) dx - \int_{\{u>0\}} Q(x) = \int_{\{u=0\}} Q(x) dx \leq C |\{u = 0\} \cap B_r|.$$

Stimiamo ora il termine a destra. Per l'equazione soddisfatta da w e dalla disuguaglianza di Poincarè segue che

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |\nabla u|^2 - \int_{B_r} |\nabla h|^2 - \int_{B_r} |\nabla w|^2 &= \int_{B_r} |\nabla(u-h)|^2 - \tilde{\lambda}_1 \|u\|_{L^\infty(B_R)} \int_{B_r} w \\ &\geq \frac{C_d}{r^2} \int_{B_r} |h-u|^2 - \tilde{\lambda}_1 \|u\|_{L^\infty(B_R)} \|w\|_{L^\infty(B_R)} |B_r| \\ &\geq \frac{C_d}{r^2 |B_r|} \left(\int_{B_r} h-u \right)^2 - \tilde{\lambda}_1^2 \|u\|_{L^\infty(B_R)}^2 \frac{R^2}{2d} |B_r|. \end{aligned}$$

Sfruttiamo ora il fatto che h è l'estensione armonica di u come segue:

$$h(0) = \int_{\partial B_r} h(x) d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial B_r} u(x) d\mathcal{H}^{d-1} \geq \kappa_0 r$$

visto che u è non degenere. Inoltre per la disuguaglianza di Harnack segue che

$$h(x) \geq \kappa_0 c_d r \quad \text{su } B_{\frac{r}{2}}.$$

Ricordiamo ora che u è Lipschitziana di costante L e $u(0) = 0$, quindi

$$u(x) \leq L|x| \quad \text{su } B_r.$$

Allora scegliendo ε tale che $k_0 c_d \geq 2L\varepsilon$, abbiamo che

$$u(x) \leq L\varepsilon r \quad \text{su } B_{\varepsilon r}$$

e inoltre

$$\begin{aligned} \int_{B_r} (h - u) &= \int_{B_r} (h + w - u) dx - \int_{B_r} w dx \\ &\geq \int_{B_{r\varepsilon}} (h + w - u) dx - \int_{B_r} w dx \\ &\geq \int_{B_{r\varepsilon}} (h - u) dx - \|w\|_{L^\infty(B_r)} |B_r| \\ &\geq \left(\frac{\kappa_0 C_d}{2} - L\varepsilon \right) |B_{r\varepsilon}| r - C_d r^2 |B_r| \\ &\geq \left(\frac{\kappa_0 C_d}{2} - L\varepsilon \right) |B_{r\varepsilon}| r. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che

$$|\{u = 0\} \cap B_r| \geq \frac{c_d}{4C} \frac{|B_{r\varepsilon}|^2}{|B_r|} - \tilde{\lambda}_1^2 \|u\|_{L^\infty(B_r)}^2 \frac{R^2}{2d} |B_r| \geq \frac{c_d}{4C} \frac{|B_{r\varepsilon}|^2}{|B_r|} \geq \frac{c_d}{4C} \varepsilon^{2d} |B_r|$$

e segue dunque la tesi. \square

Con questo ultimo risultato, per il Teorema 1.27, abbiamo che lo spazio di tipo Sobolev $\tilde{H}_0^1(\Omega)$ coincide con $H_0^1(\Omega)$ e abbiamo quindi una soluzione nella classe dei domini aperti per il problema di forma

$$\lambda_1(\Omega) + \int_{\Omega} Q(x) dx.$$

che questo elaborato si era posto di affrontare.

Ringraziamenti

Giunti alla fine di questo lungo percorso, non posso esimermi dalla scrittura della parte forse più difficile di questo elaborato. Non so se il numero di volte in cui la parola *grazie* o affini comparirà in questa pagina sarà superiore a quello in cui la parola *autofunzione* o *laplaciano* sia comparsa nelle scorse pagine, ma probabilmente ci andrà vicino. Nella mia, forse eccessiva, modestia una capacità che mi sono sempre riconosciuto è quella di cavarmela con le parole. Spero che quanto seguirà sia colmo di forza ed emozione come è inteso nella mia testa e nel mio cuore.

Un ringraziamento speciale va al professor Bozhidar Velichkov. Grazie per avermi guidato nei primi passi, auspicabilmente di un lungo cammino, nel fare effettivamente Matematica. I suoi consigli e le sue parole sono stati grande fonte di ispirazione e forza per seguire la mia passione.

Un grazie va anche alla mia famiglia che, nonostante gli alti e bassi degli ultimi anni, è stata una parte cruciale di questo percorso. Nel bene e nel male mi ha forgiato e mi ha fatto diventare l'uomo che sono oggi. In particolare li voglio ringraziare uno ad uno:

Grazie a mia sorella. Ricordati, un po' come il sottoscritto, di credere di più in te stessa. Hai un potenziale che aspetta solamente di poter uscire.

Grazie a mio fratello. Non siamo bravi con le parole tra di noi, ma una cosa ci tengo a dirtela. Grazie per tutto quello che hai fatto in questi anni, senza il tuo sforzo immane io, il mio percorso a Pisa, non lo avrei iniziato neanche per sbaglio.

Grazie a mio padre. Il tuo esempio di grande impegno e grande costanza sono stati un'influenza fondamentale. Grazie per avermi insegnato ad essere ambizioso e a non accontentarmi, restando sempre consapevole dei propri limiti.

Grazie a mia madre. Penso tu sappia che non c'è bisogno di dirti quanto io ti abbia a cuore, ma sono anche consapevole che sia meglio dirlo una volta in più, piuttosto che una in meno. Grazie per le continue parole di supporto e di incoraggiamento: saranno sempre custodite con cura nel mio cuore.

Nella vita di una persona la famiglia è importante certo, ma non è l'unica componente nella complessa equazione che è la propria esistenza. A ringraziare tutte le persone che sono state parte di questo percorso penso che potrei scrivere pagine e pagine e forse la forza di queste parole scemerebbe. So che chi c'è stato non ha bisogno di vedere scritto il proprio nome su questa pagina, ma sono anche consapevole dell'emozione nel vedersi qua in fondo.

Un grazie va agli amici dell'università. La vostra compagnia e il vostro supporto sono riusciti ad alleggerire le lunghe sessioni e gli esami al 26 di luglio. I ricordi delle uscite per

Pisa e delle serate passate in dipartimento saranno sempre con me.

Ci tengo a rivolgere un ringraziamento speciale a Fausto, mi hai insegnato a vivere la vita con un po' più di leggerezza.

Un grazie va anche ad Alessio. Ad Andrea. A Emma e a Sofia. Siete delle persone speciali. Spero di essere riuscito a darvi almeno un po' di quello che voi avete dato a me.

Come dimenticarsi di chi c'è sempre stato, ma con cui purtroppo non ci si riesce a vedere spesso? Sono convinto che non sia il numero delle volte che due persone si vedono a definire la profondità del loro rapporto, bensì l'emozione del momento ogni volta che ci si rivede.

Grazie Daniela e Camillo, so che voi in particolare vi potreste ritrovare in queste parole, ma il vostro supporto nei miei primi anni a Pisa è stato fondamentale. In particolare, grazie Arzig: i tuoi attacchi a sorpresa con le moltiplicazioni da piccolino sicuramente sono stati l'iniziazione più divertente a questo mondo.

Grazie Marmotta Felice. Le mie gite a Firenze e le tue a Pisa sono sempre state un allegro momento di distrazione.

Grazie Francesca. I tuoi sforzi per riuscire a venirmi a trovare in Santa Maria Novella, anche solo per stare un'ora insieme, hanno un valore che supera qualsiasi cosa.

Voglio concludere questa parte ringraziando tutti coloro che si sono ritagliati un momento dalle loro vite per poter condividere con me un momento così importante della mia vita.

*Ad maiora semper,
Andrea.*

Bibliografia

- [1] Briançon, Tanguy, Lamboley, and Jimmy. Regularity of the optimal shape for the first eigenvalue of the laplacian with volume and inclusion constraints. *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire*, 26(4):1149–1163, 2009.
- [2] Dorin Bucur. Minimization of the k -th eigenvalue of the Dirichlet Laplacian. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 206(3):1073–1083, 2012.
- [3] Giuseppe Buttazzo and Gianni Dal Maso. Shape optimization for Dirichlet problems: Relaxed solutions and optimality conditions. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 23(2):531 – 535, 1990.
- [4] Mazzoleni Dario, Terracini Susanna, and Velichkov Bozhidar. Regularity of the optimal sets for some spectral functionals. *Geometric and Functional Analysis*, 27:373–426, 2017.
- [5] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010.
- [6] G. Faber. Beweis dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt. pages 169–172, 1923.
- [7] Antoine Henrot. Minimization problems for eigenvalues of the laplacian. *Journal of Evolution Equations*, pages 443–461, 2003.
- [8] E. Krahn. Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises. 94:97–100, 1924.
- [9] E.H. Lieb and M. Loss. *Analysis*. Crm Proceedings & Lecture Notes. American Mathematical Society, 2001.
- [10] Elliott H. Lieb. On the lowest eigenvalue of the laplacian for the intersection of two domains. *Inventiones mathematicae*, 74:441–448, 1983.
- [11] P. L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case, part 1. *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire*, Volume 1 no. 2:109–145, 1984.
- [12] P. L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case, part 2. *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire*, Volume 1 no. 2:223–283, 1984.

- [13] Dario Mazzoleni and Aldo Pratelli. Existence of minimizers for spectral problems. *J. Math. Pures Appl.*, 2013. cvgmt preprint.
- [14] G. Pólya and G. Szegő. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1951.
- [15] G. Pólya. On the characteristic frequencies of a symmetric membrane. *Mathematische Zeitschrift*, 63:331–337, 1955.
- [16] Bozhidar Velichkov. *Regularity of the One-phase Free Boundaries*. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana. Springer Cham, 2023.